CALCULO II

Ingeniería Mecánica
Ingeniería Electromecánica

Equipo de Cátedra

Profesor Titular	Dr. Javier Gimenez
Profesor Adjunto	Dr. Emanuel Tello
Jefe de Trabajos Prácticos	Ing. Cristian Bustos

AÑO 2026

INTEGRALES DOBLES

De la misma manera que la necesidad de calcular áreas planas condujo al concepto de integral definida EN Cálculo I, ahora se busca calcular el volumen de un sólido, y en el proceso se llega a la definición abstracta de integral doble.

REPASO

En Cálculo I se definió el área de regiones planas, encerrada por una función $y = f(x)$, en un intervalo cerrado $[a, b]$, en el cual $f(x)$ debía ser continua y acotada.

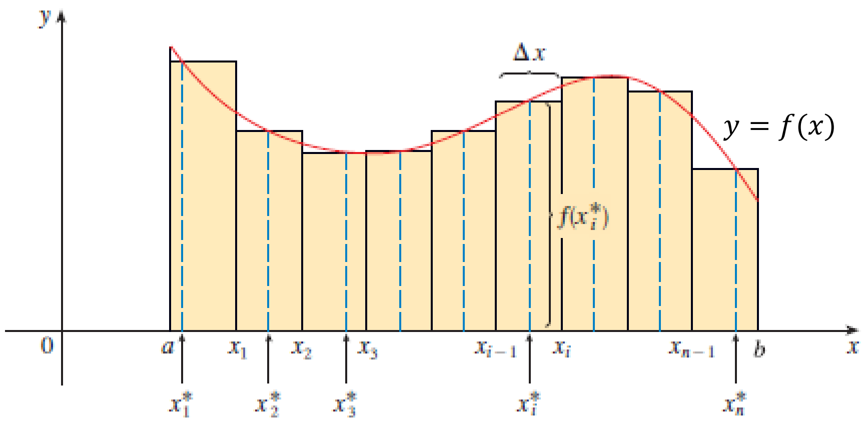


Figura 1

Se subdivide el intervalo $[a, b]$ en n-subintervalos de igual longitud, y se elige un punto representativo de cada intervalo x_i^*. Luego, el área bajo la curva se puede aproximar por la suma de las áreas de los rectángulos de base $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ y altura $f(x_i^*)$, esto es:

$$A \cong \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Subdividiendo el intervalo $[a, b]$ en intervalos de menor longitud, o lo que es los mismo considerar que n tiende a infinito, en el límite se tiene la definición de integral definida

$$\boxed{A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \int_a^b f(x)dx}$$

De una manera similar se extiende este concepto a campos escalares de más de una variable

VOLÚMENES E INTEGRALES DOBLES

Sea $z = f(x, y)$ una función escalar definida en un recinto rectangular

$$\mathcal{R} = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \subset \mathbb{R}^2$$

y consideremos el sólido limitado por los planos $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, la base $\mathcal{R}$ y el techo dado por la gráfica $f(x, y)$ (ver Figura 2)

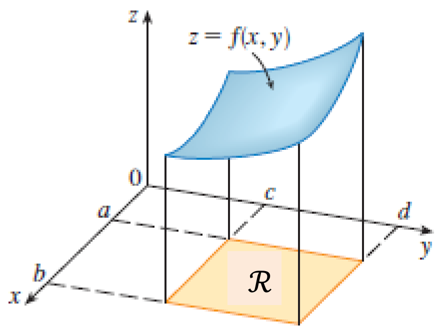


Figura 2

La idea es calcular el volumen del sólido, para ello se procede en forma análoga a integrales de una variable.

Se sabe que volumen es igual al producto del área de la base por la altura. En este caso la base es un rectángulo y la altura del sólido no es constante, ya que está dada por la superficie $f(x, y)$.

Se procede a realizar una partición en la base en pequeños elementos rectangulares del siguiente modo:

Se divide el intervalo $[a, b]$ en m subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ con $1 \le i \le m$ de amplitud Δx, y el intervalo $[c, d]$ en n subintervalos $\left[y_{j-1}, y_j\right]$ con $1 \le j \le n$ de amplitud Δy (Figura 3)

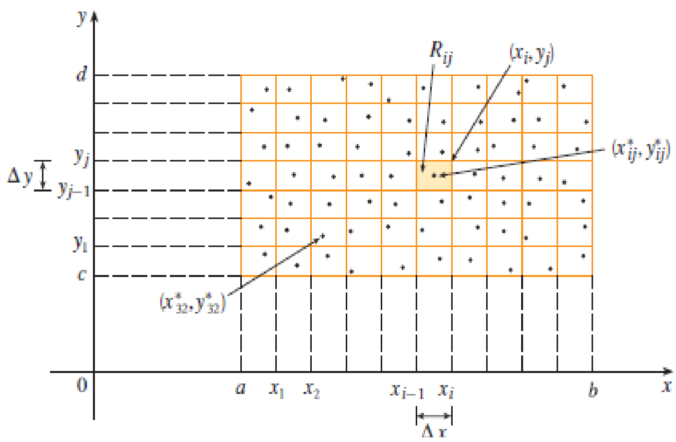


Figura 3

Se elige un punto representativo $\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)$ de cada rectángulo $\mathcal{R}_{ij}$ como por ejemplo: el centro, un vértice, el punto donde la función alcanza su máximo valor dentro del rectángulo, etc. (ver Figura 4).

Se forma una caja rectangular tipo columna que tiene por base el elemento $\mathcal{R}_{ij}$ y altura $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ como se muestra en la Figura 5 generando un volumen ΔV_{ij}. Como el área de $\mathcal{R}_{ij}$ es $A_{ij} = \Delta x \Delta y$ resulta que

$$\Delta V_{ij} = A_{ij}. f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$$

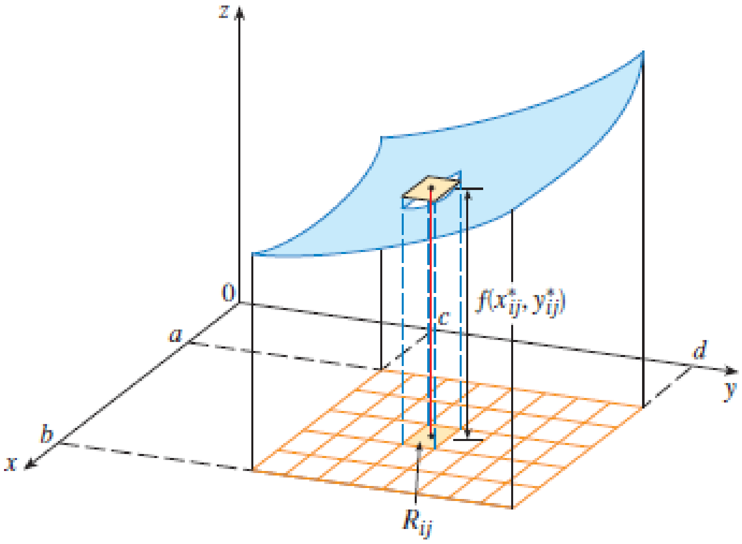


Figura 4

Si se repite este procedimiento en todas las celdas $\mathcal{R}_{ij}$ y se suman todos los volúmenes correspondientes (ver Figura 5) se obtiene una aproximación del volumen total

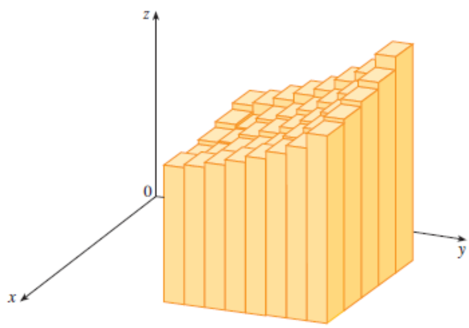


Figura 5

$$V \cong \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \Delta V_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y$$

Haciendo una partición más fina, o sea aumentando n y m en cada partición, de tal manera que la diagonal del sub rectángulo $\mathcal{R}_{ij}$ tienda a cero, se tiene que

$$\boxed{V = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y) dxdy}$$

Nota: Para conjuntos $\mathcal{R}$ contenidos en el plano $\mathbb{R}^2$, la **medida** de este conjunto es el área. De allí que los conjuntos de **medida nula** son puntos y curvas.

Definición

Sea $f(x,y)$ continua y acotada en $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ excepto en un conjunto de área nula. Se define

$$V = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dxdy$$

<u>Observación</u>: Otra forma más usada en los libros de física, ingeniería, tecnología, etc. es considerar la diferencial en reemplazo del elemento, se sabe que para valores pequeños de los incrementos en x e y se tiene que

$$dV \cong \Delta V = f(x,y)dA = f(x,y)\,dx\,dy$$

Integrando en todo el domino $\mathcal{R}$ se cumple

$$V = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dxdy$$

Cualquiera de las dos formas se llega a la misma definición. Y se lee ***integral doble del campo*** $f(x,y)$ ***sobre el dominio de integración*** $\mathcal{R}$

INTEGRALES REITERADAS

Normalmente calcular integrales simples no es muy sencillo, el cálculo de integrales dobles es un poco más complicado.

Sea la superficie dada por $z = f(x,y)$ y la región $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ dada por

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

Por lo dicho anteriormente el volumen está dado por la integral doble

$$V = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dxdy$$

Otra forma de expresar el mismo volumen sería la siguiente:

Si se considera $y = y_c$ constante, entonces el plano vertical paralelo al plano xz que pasa por $y = y_c$ corta a la superficie $z = f(x,y)$ en una curva, dada por la expresión $z = f(x,y_c)$ (ver Figura 6).

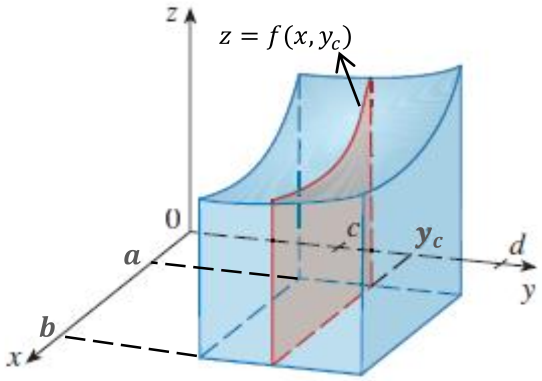


Figura 6

Luego el área de la lámina encerrada por dicha curva teniendo como base el intervalo $[a, b]$ (como en Cálculo I) está dada por la integral definida

$$A(y_c) = \int_a^b f(x, y_c)\, dx$$

Esta integral la sabemos resolver porque involucra una sola variable al mantener constante la otra.

La constante y_c fue fijada arbitrariamente entre c y d, lo que implica que de forma análoga puede calcularse $A(y)$ para cualquier $y \in [c, d]$.

En particular, si tomamos una partición como la anterior $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ con incrementos constantes $\Delta y = y_j - y_{j-1}$, y elegimos un punto y_j^* en cada intervalo $[y_{j-1}, y_j]$, entonces $A(y_j^*)\Delta y$ representa el volumen de una lámina como la que se diagrama en la Figura 6 a la que se le ha incorporado un espesor Δy.

Sumando estos volúmenes generados en cada celda de la partición se obtiene la siguiente aproximación:

$$V \approx \sum_{j=1}^{m} A(y_j^*)\Delta y$$

Luego, haciendo la partición cada vez más fina, esto es, aumentando la cantidad de celdas, resulta que

$$V = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} A(y_j^*)\Delta y = \int_c^d A(y)dy$$

Luego reemplazando $A(y)$ por su expresión resulta

$$V = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)dx\right] dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dx\, dy \qquad (1)$$

Esto significa que se integra primero respecto de x entre a y b considerando y =cte para luego al resultado integrarlo respecto de y entre c y d.

Análogamente se puede considerar primero $x = x_c$ constante, lo cual gráficamente representa un plano vertical paralelo al plano yz. Este plano corta a la superficie determinando una curva de ecuación $z = f(x_c, y)$. El área de la lámina que tiene por altura $z = f(x_c, y)$ y como base al intervalo $[a, b]$ (ver Figura 7) está dada por

$$A(x_c) = \int_c^d f(x_c, y)dy$$

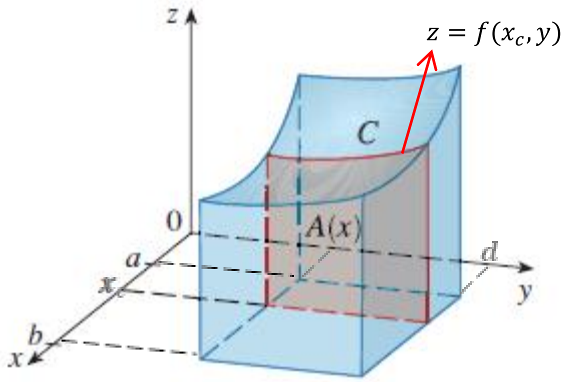


Figura 7

Si se considera el espesor Δx, recorriendo todo el intervalo $[a, b]$ se llega a la expresión

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x = \int_c^d A(x)dx$$

$$V = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\, dx \qquad (2)$$

Pero como el sólido es el mismo, el volumen es único, y con cualquiera de las dos formas se llega al mismo resultado, es decir, (1) es igual a (2)

$$V = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy$$

NOTA: El orden de integración no altera el resultado

- En (1) integro la función primero respecto de x según los límites donde se mueve x (en este caso entre a y b), y luego al resultado se lo integra según los límites donde se mueve y (en este caso entre c y d)

- En (2) integro la función primero respecto de y según los límites donde se mueve y (en este caso entre c y d), y luego al resultado se lo integra según los límites donde se mueve x (en este caso entre a y b)
- Los corchetes en algunas bibliografías no se ponen, pero ayudan a ordenar las integrales. Con el tiempo y la práctica uno deja de colocarlos.

<u>Ejemplo1</u>: Hallar el volumen del sólido limitado por los planos coordenados, los planos $x = 2, y = 3$, y el plano $x + y + z = 10$

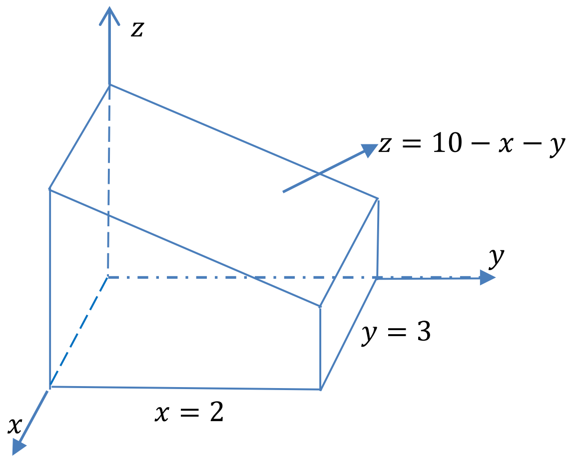
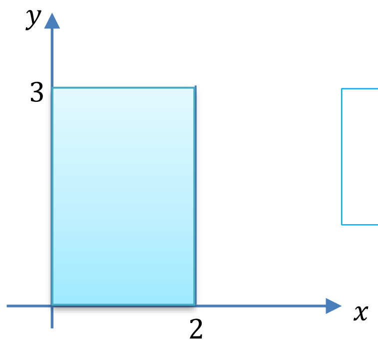


Figura 8

La proyección del sólido sobre el plano xy es un rectángulo con lados dados por las rectas de ecuación $x = 2,\ y = 3, x = 0,\ y = 0$.

Se dibuja la base para ver mejor la variación de los límites



$0 \leq x \leq 2$

$0 \leq y \leq 3$

Figura 9

Siguiendo el razonamiento anterior el volumen será:

- Considero $x =$ cte
  Eso significa que debo integrar primero respecto a y, aplicar la regla de Barrow, y al resultado integrarlo respecto a x. Esto es, se resuelve de adentro hacia afuera:

$$V=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dy\,dx\;=\int_0^2\left[\int_0^3(10-x-y)dy\right]dx=$$
$$=\int_0^2\left[10y-xy-\frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_{y=0}^{y=3}dx=\int_0^2\left(\frac{51}{2}-3x\right)dx=\left(\frac{51}{2}x-3\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2}=45$$

- Considero $y=$ cte integro primero respecto de x y luego respecto de y

$$V=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dx\,dy\;=\int_0^3\left[\int_0^2(10-x-y)dx\right]dy=$$
$$=\int_0^3\left[10x-\frac{x^2}{2}-yx\right]\Bigg|_{x=0}^{x=2}dy=\int_0^3(18-2y)dy=18y-y^2\Bigg|_{y=0}^{y=3}=45$$

Los resultados obtenidos por las dos formas son iguales

INTEGRALES DOBLES SOBRE RECINTOS GENERALES

No siempre los volúmenes tienen como base un rectángulo, sino que puede ser una región D limitada por curvas, luego la integral doble $\iint_D f(x,y)dxdy$ sobre la región D existe si $f(x,y)$ es continua y acotada en D salvo en un conjunto de área nula.

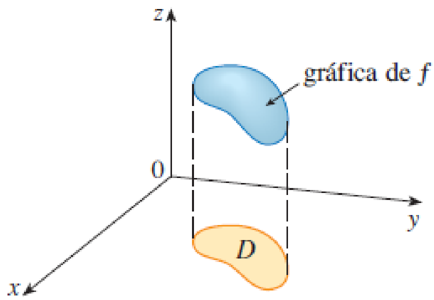
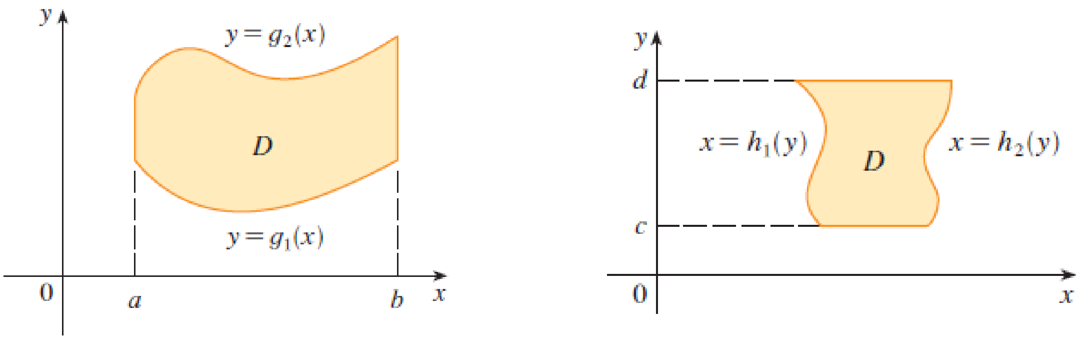


Figura 10

Existen dos tipos de regiones D, las cuales se diagraman en la Figura 11



Región Tipo I: $x=$ cte

Región Tipo II: $y=$ cte

Figura 11

La diferencia entre ellas es que en la Región Tipo I se puede observar que la región D está comprendida entre dos rectas verticales $x=a$ y $x=b$**.** Mientras que en la Región Tipo II, D está comprendida entre dos rectas horizontales $y=c$ e $y=d$.

Anteriormente se vio que cuando la base es un rectángulo, para cada valor de x la ordenada y varía entre los límites del lado vertical del rectángulo $[c, d]$.

- En la Figura 12 que es de Tipo I se puede observar que se pueden trazar rectas verticales que dejan totalmente comprendida la región D (o sea que son tangentes a la región D). Estas rectas son $x = a$, $x = b$. Luego para cada valor de x que pertenece al intervalo $[a, b]$ la ordenada y no varía en forma constante, sino que cambia según el comportamiento de la función $y = g_1(x)$ y la función $y = g_2(x)$. Esto escrito en forma simbólica es:

$$a \leq x \leq b$$

$$g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$$

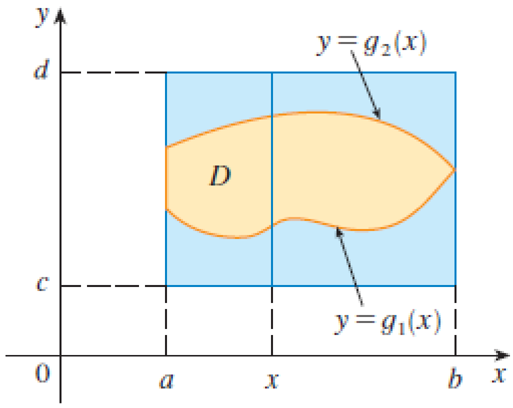


Figura 12

Luego si la base del sólido es del tipo I, el volumen puede calcularse como

$$V = \iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\ dy\right] dx$$

Se integra de adentro hacia afuera, primero con respecto a y. Luego, al reemplazar los límites de integración todo queda en función de x. Posteriormente se procede a integrar respecto de x, se aplica la regla de Barrow para los valores a y b, y se obtiene un número, el cual será el volumen del sólido dado.

Lo importante es saber determinar las funciones $g_1(x)$ y $g_2(x)$, o sea las curvas inferior y superior que delimitan la región D.

- Análogamente para las regiones tipo II (ver Figura 13) se puede observar que la región queda comprendida totalmente entre dos rectas horizontales de ecuación $y = c$, $y = d$, luego considerando un valor arbitrario de y perteneciente al intervalo $[c, d]$ se puede observar que los valores de x no varían en forma constante, sino que van cambiando para cada valor de y siguiendo el sentido creciente entre $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$. Expresado simbólicamente será

$$c \leq y \leq d$$
$$h_1(y) \leq x \leq h_2(y).$$

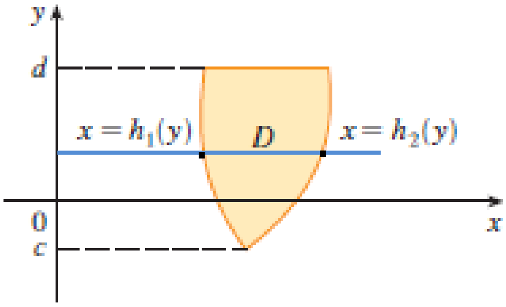


Figura 13

Luego el volumen se puede calcular como

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right] dy$$

Se integra de adentro hacia afuera comenzando con respecto a x, lo cual, al reemplazar los límites de integración, todo queda en función de y. Luego se procede a integrar respecto de y, se aplica la regla de Barrow para los valores c y d, y se obtiene un número que será el volumen del sólido dado.

Lo importante es saber determinar las funciones $h_1(x)$ y $h_2(x)$, o sea las curvas de la izquierda y derecha que delimitan la región D.

NOTA: A veces una región puede ser tipo I y tipo II al mismo tiempo, esto es, se puede considerar que y varíe entre valores constantes y que x varíe entre curvas que serán funciones de y, o al revés. De las dos formas el resultado del volumen será el mismo

Ejemplo 2: Hallar el volumen comprendido entre los planos coordenados y la superficie $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{2} = 1$ (ver Figura 14)

Solución: Siempre es bueno graficar el sólido para orientarnos con los límites

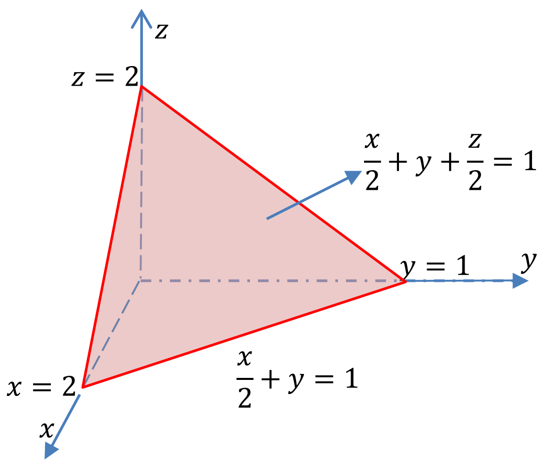
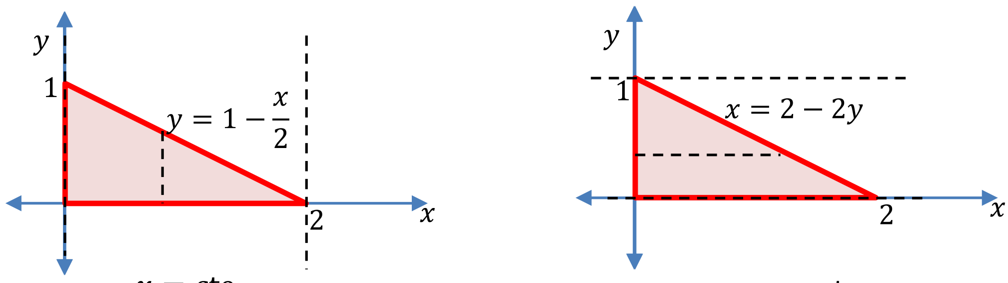


Figura 14

La proyección de la superficie (plano $z = 2 - x - 2y$) sobre el plano xy es un triángulo limitado por los ejes coordenados y la recta intersección del plano dado con el plano xy de ecuación $y = 1 - {}^{x}/_{2}$

Esta región es de tipo I, pero también es de tipo II. Luego podemos tomar $x =$cte y analizar los límites de la variable y, o al revés. De las dos formas el resultado debe ser el mismo. Para ello es conveniente graficar la región del dominio en el plano xy.



$x =$ cte
$0 \leq x \leq 2$
$0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}$

$y =$ cte
$0 \leq y \leq 1$
$0 \leq x \leq 2 - 2y$

Figura 15

- Considero $x =$cte
  Observando la Figura 15, si trazamos rayos $x =$cte (rectas verticales paralelas al eje y diagramadas con líneas entrecortadas) se puede ver que el mínimo valor de x que corta la región delimitada con rojo es $x = 0$ y el máximo valor es $x = 2$. Para los valores intermedios de x entre [0,2] los rayos ingresan a la región por la recta $y = 0$ y salen tocando la recta superior de ecuación $y = 1 - {}^{x}/_{2}$. Luego la integral del volumen será

$$V = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\ dy \right] dx = \int_0^2 \left[\int_0^{1-\frac{x}{2}} (2 - x - 2y)\ dy \right] dx =$$

$$= \int_0^2 (2y - xy - y^2) \Big|_0^{1-\frac{x}{2}} dx$$

$$= \int_0^2 \left(2\left(1 - \frac{x}{2}\right) - x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(1 - x + \frac{1}{4}x^2\right) dx = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^2 = \frac{2}{3}$$

- Considero $y =$cte
  Para $y =$cte se procede análogamente pero trazando rayos paralelos al eje x. El mínimo valor de y es $y = 0$, y el máximo valor de y que deja por debajo a toda la región delimitada con rojo es $y = 1$. En la Figura 15 se observa que si trazamos rayos paralelos al eje x, los límites de x no permanecen constantes, ya

que varían entre la recta $x = 0$ y la recta $x = 2 - 2y$. Luego la integral del volumen será:

$$V = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\ dx\right] dy = \int_0^1 \left[\int_0^{2-2y} (2 - x - 2y)\ dx\right] dy$$

$$= \int_0^1 \left(2x - \frac{x^2}{2} - 2yx\right)\Big|_0^{2-2y} dy$$

$$= \int_0^1 \left(2(2-2y) - \frac{(2-2y)^2}{2} - 2y(2-2y)\right) dy$$

$$= \int_0^1 (2 - 4y + 2y^2) dy = \left(2y - 2y^2 + \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Se puede observar que de las dos formas se obtiene el mismo resultado

Ejemplo 3

Hallar $\iint_D f(x,y)dxdy$ si $f(x,y) = x + 2y$ y el recinto D está limitado por las curvas $y = 2x^2$ e $y = 1 + x^2$.

Solución

a) Se debe hallar la intersección entre ambas parábolas resolviendo el sistema

$$\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 1 + x^2 \end{cases}$$

Aplicando igualación resulta queda

$$2x^2 = 1 + x^2 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 1 \ , \quad y = 2$$

Luego los puntos de intersección son $(-1,2)$ y $(1,2)$ como se puede observar en la Figura 16

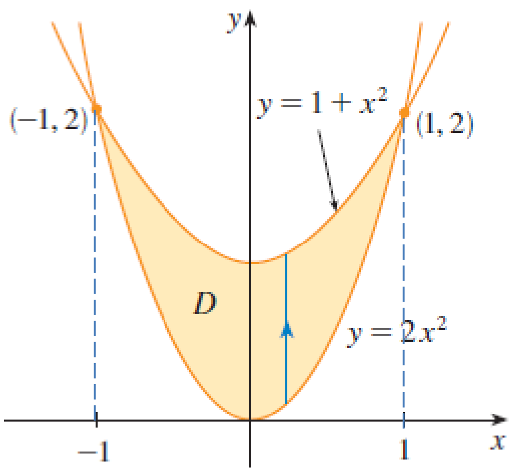


Figura 16

Se observa que rectas verticales $x = -1$ y $x = 1$ dejan contenida totalmente a la región D. Además, para cualquier valor de x, los rayos verticales (diagramados con azul) ingresan a la región por la curva inferior $y = 2x^2$ y salen de la región por la curva superior $y = x^2 + 1$. Luego se cumple

$$-1 \leq x \leq 1 \qquad 2x^2 \leq y \leq x^2 + 1$$

b) Cálculo de la integral doble:

$$\iint_D (x + 2y)dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{2x^2}^{x^2+1} (x + 2y)\, dy \right) dx = \cdots = \frac{79}{60}$$

El cálculo se deja para el lector

NOTA: Cuando se debe calcular una integral doble, es esencial dibujar un diagrama de la base del sólido. A veces es importante dibujar una flecha como la de la Figura 16 que ayuda a determinar los límites de la región, los cuales, en el ejemplo 3, son $x = -1$ y $x = 1$. Luego, siguiendo la flecha cuyo sentido debe indicar el crecimiento de y, o sea, de abajo hacia arriba, comienza en la curva inferior (función del límite inferior) y termina en la curva de arriba (función del límite superior). Para un región de tipo II se trazan rectas paralelas al eje x que dejen incluida totalmente la región y así determinar el mínimo y máximo valor de y. Luego se traza una flecha horizontal con sentido de izquierda a derecha para determinar las curvas que serán el límite inferior y superior de la integral interna.

Ejemplo 4: Hallar $\iint_D f(x,y)dxdy$ si $z = x^2 + y^2$ considerando como base es la región D limitada por las curvas $y = 2x$ e $y = x^2$.

1. Lo primero es dibujar el recinto D y encontrar los puntos de intersección entre las curvas.

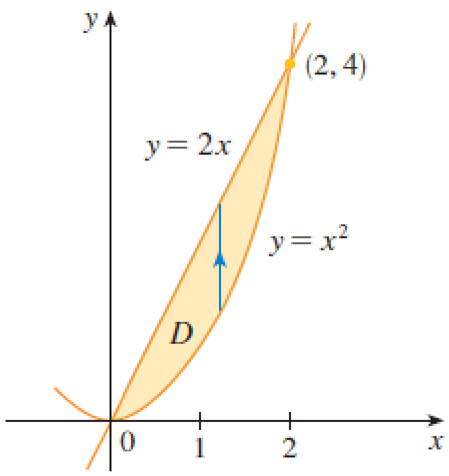


Figura 17

2. Podemos observar que es una región tipo I, es decir si se trazan rectas verticales, la región queda totalmente contenida entre $x = 0$ y $x = 2$, lo que da el mínimo y el máximo valor de x, respectivamente (ver Figura 17).

   Luego, teniendo en cuenta la flecha azul en la Figura 17, vemos que se entra a la región en la parábola y se sale en la recta. Entonces los límites son $0 \leq x \leq 2$, $x^2 \leq y \leq 2x$ y el volumen es

$$\iint_D (x^2 + y^2)dxdy = \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2)dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{x^2}^{2x} dx = \int_0^2 \left(2x^3 + \frac{(2x)^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{14}{3}x^3 - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx = \left(\frac{14}{12}x^4 - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right) \Bigg|_0^2 = \frac{216}{35}$$

3. Se puede considerar la región D como una región tipo II. Esto quiere decir que debemos tazar rectas paralelas al eje x tal que la región quede totalmente contenida entre ellas. En este caso las rectas son $y = 0$ e $y = 4$.

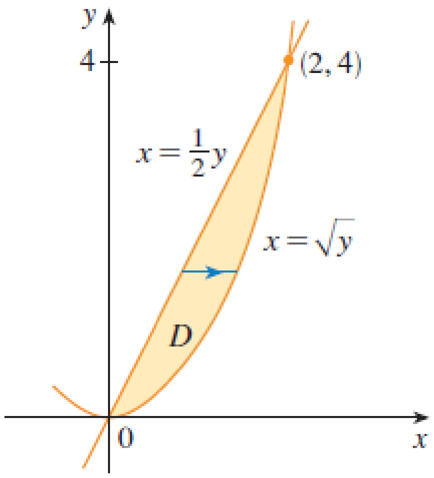


Figura 18

   Observando la flecha azul de la Figura 18 se puede ver que para cualquier valor de y se ingresa a la región por la recta y se sale por la curva. Luego, los límites son $0 \leq y \leq 4$ y $\frac{1}{2}y \leq x \leq \sqrt{y}$, y por ende la integral queda

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^4 \left(\int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^2+y^2)dx \right) dy$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \right)\Bigg|_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} dy = \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{y^3}{24} - \frac{1}{2}y^3 \right) dy = \frac{216}{35}$$

Se puede observar que se llega al mismo resultado

PROPIEDADES DE INTEGRALES DOBLES

Las propiedades de las integrales dobles son heredadas de las integrales simples vistas en Cálculo I, ellas son:

1. Propiedad de Linealidad

$$\iint_D (c_1 f(x,y) + c_2 g(x,y))dxdy = c_1 \iint_D f(x,y)dxdy + c_2 \iint_D g(x,y)dxdy$$

2. Propiedad de aditividad respecto del dominio de integración

Si el recinto de integración D puede expresarse como la unión de dos regiones (ver Figura 19) de tal manera que no tengan una porción de superficie que se superpongan, esto significa que la intersección de las dos subregiones podrá ser un punto, una curva, o algún conjunto de área nula.

$D = D_1 \cup D_2$ tal que $D_1 \cap D_2$ sea un conjunto de área nula

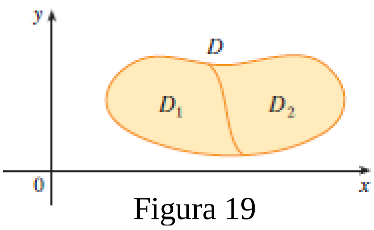


Figura 19

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA

Si $f(x,y) = 1$ entonces el valor del volumen coincide con el área de la región D. Luego, el área de una región plana se calcula mediante una integral doble. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5:

Hallar el área de la región plana delimitada por las curvas $y^2 = 2x + 6$ e $y = x - 1$

Se debe calcular

$$A = \iint_D dxdy$$

Para ello se grafica la región encontrando los puntos de intersección entre las dos curvas

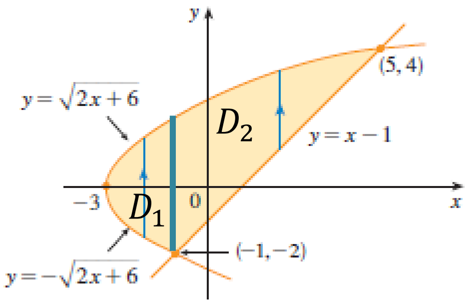


Figura 20

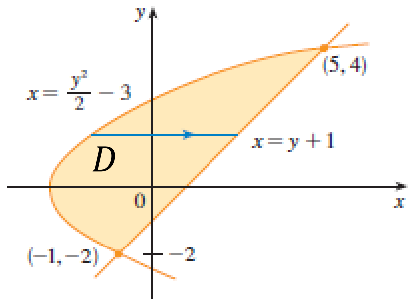


Figura 21

En la Figura 20 se ha considerado $x =$cte obteniendo $x = -3$ como el mínimo valor de x para la región, y $x = 5$ como el máximo. Sin embargo, a diferencia de los ejemplos anteriores, para los valores de x comprendidos entre -3 y 5, la variación de y no es siempre la misma. En efecto: si observamos las flechas azules verticales, indican que para los valores de x comprendidos entre -3 y -1 la curva inferior que encontramos es $y = -\sqrt{2x+6}$ mientras que la curva superior es $y = +\sqrt{2x+6}$. Por otro lado, para valores de x mayores que -1 la curva inferior pasa a ser una recta. Esto lleva a subdividir la región en dos regiones de tal manera que $D = A \cup B$ y la intersección de ambas regiones sea una recta cuya área es nula. Luego para cada región los límites serán:

Para D_1 : $-3 \leq x \leq -1$ $\qquad -\sqrt{2x+6} \leq y \leq \sqrt{2x+6}$

Para D_2 : $-1 \leq x \leq 5$ $\qquad x - 1 \leq y \leq \sqrt{2x+6}$

$$A = \iint_D dxdy = \iint_{D_1} dxdy + \iint_{D_2} dxdy = \int_{-3}^{-1} \int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} dy\, dx + \int_{-1}^{5} \int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} dy\, dx$$

En este caso los límites quedan en función de raíces cuadradas, por lo que resultan integrales complicadas. Probemos considerando $y =$cte y veamos cómo quedan los límites.

En la Figura 21 se observa que al trazar rectas $y =$cte (paralelas al eje x) la región queda comprendida entre $y = -2$ e $y = 4$. Al considerar un valor de y cualquiera entre -2 y 4, al seguir la flecha azul se puede ver que se ingresa a la región por la parábola y se sale por la recta. Esto no cambia para ningún valor de y en el rango determinado, por lo que no hace falta dividir la región de integración y el área se calcula con una sola integral. Primero se escriben los límites y luego se calcula la integral.

$$-2 \leq y \leq 4 \qquad \frac{y^2}{2} - 3 \ \leq x \leq \ y + 1$$

$$A = \iint_D dxdy = \int_{-2}^{4} \int_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} dx\, dy$$

De esta forma, el área se halla resolviendo una sola integral sencilla. En efecto

$$A = \int_{-2}^{4} \int_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} dx\, dy = \int_{-2}^{4} x \Big|_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} dy \ = \int_{-2}^{4} \left(y + 1 - \left(\frac{y^2}{2} - 3 \right) \right) dy$$

$$= \left(\frac{y^2}{2} + y - \left(\frac{y^3}{6} - 3y \right) \right) \Big|_{-2}^{4} = 18$$

CAMBIOS DE COORDENADAS

En Cálculo I, cuando aparecía una integral de la forma

$$\int_{u_0}^{u_1} f\big(X(u)\big) X'(u) du$$

Se nos enseñó a hacer un cambio de variable $x = X(u)$ inyectivo y derivable, que junto a su diferencial $dx = X'(u)du$, al ser reemplazados en la integral resultaba una integral más sencilla de la forma

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$$

siendo $x_0 = X(u_0)$, $x_1 = X(u_1)$.

Ejemplo:

$$\int_0^1 \sqrt{1 - u^2}\, u \,\mathrm{du} = -\frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{\underbrace{1 - u^2}_{X(u)}}\, \underbrace{(-2u)}_{X'(u)} \,\mathrm{du} = -\frac{1}{2} \int_{1=X(0)}^{0=X(1)} \sqrt{x}\, \mathrm{dx} = \cdots = \frac{1}{3}$$

Recíprocamente, si tenemos que resolver una integral difícil de la forma

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$$

podemos rebuscárnosla para hallar un cambio de variable inyectivo y derivable de forma tal que

$$\int_{u_0=X^{-1}(x_0)}^{u_1=X^{-1}(x_1)} f\big(X(u)\big)X'(u)du$$

Sea más sencillo de resolver a pesar de su forma general rebuscada.

Generalicemos este método para el caso de integrales dobles (o incluso múltiples) de la forma

$$\iint_H f(x,y)dxdy$$

Si consideramos el cambio de coordenadas $\begin{cases} x = X(u,v) \\ y = Y(u,v) \end{cases}$

entonces se establece una correspondencia $\vec{r}(u,v) = (X(u,v), Y(u,v))$ entre los puntos del plano xy y los puntos del plano uv, la cual asumiremos que es uno a uno (inyectiva). Además, asumiremos que $x = X(u,v)$ e $y = Y(u,v)$ son funciones con derivadas parciales continuas.

Este cambio de variables puede que nos permita integrar sobre una región $D = \vec{r}^{-1}(H)$ mucho más sencilla que la región de integración original H.

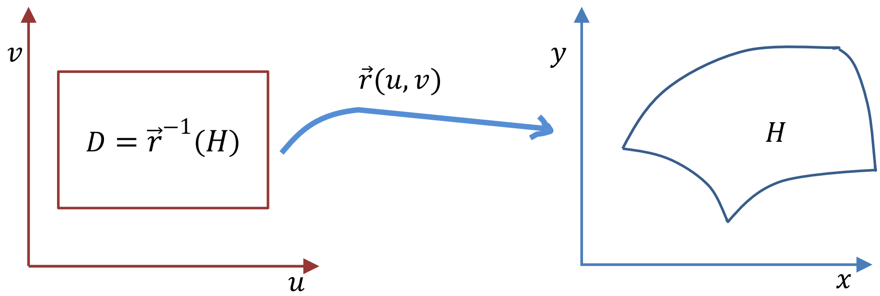


Figura 22

Al mismo tiempo, y al igual que en Cálculo I, la función a integrar $f(x,y)$ pasa a estar expresada en función de variables u y v, generando otra función dada por

$$f^*(u,v) = f\big(X(u,v), Y(u,v)\big) = f\big(\vec{r}(u,v)\big)$$

Esta función puede resultar ser más simple de integrar o no, por lo que se debe analizar este hecho en simultáneo con la simplificación de la región de integración.

En concreto, la generalización del método de sustitución para el caso de integrales dobles viene dado por el siguiente Teorema

Teorema (de cambio de variables): Si $f: H \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua sobre una región simplemente conexa H, y definimos un cambio de variables $\vec{r}: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ inyectivo con $\vec{r}(D) = H$ y con componentes con derivadas parciales continuas. Entonces

$$\iint_H f(x,y)dxdy = \iint_D f\big(\vec{r}(u,v)\big)|\mathcal{J}(u,v)|dudv$$

donde $|\mathcal{J}(u,v)|$ es el determinante de la matriz Jacobiana dada por

$$\mathcal{J}(u,v) = \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} = \begin{bmatrix} X_u & X_v \\ Y_u & Y_v \end{bmatrix}$$

Nota: Este teorema se generaliza trivialmente a n variables considerando matrices Jacobianas de $n \times n$. Veremos más ejemplos al desarrollar el tema de integrales triples.

Veamos cómo caso particular la transformación a Coordenadas Polares.

COORDENADAS POLARES

Un punto en el plano queda determinado por dos valores. Normalmente se usan las *coordenadas cartesianas* (x, y). Pero también el punto puede identificarse con otros dos valores: el módulo del vector posición y el ángulo que forma el vector con el eje x en sentido anti-horario, llamadas *coordenadas polares*

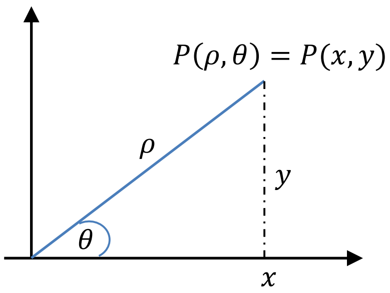


Figura 23

La relación entre las coordenadas polares y las coordenadas cartesianas son:

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \mathrm{arctg}\left({}^{y}/_{x}\right) \end{cases}$$

$$\vec{r}(\rho,\theta) = \big(X(\rho,\theta), Y(\rho,\theta)\big) = (\rho\cos(\theta)\,, \rho\,\mathrm{sen}(\theta))$$

Calculemos el Jacobiano correspondiente:

$$\mathcal{J}(\rho,\theta) = \frac{\partial(X,Y)}{\partial(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} X_\rho & Y_\rho \\ X_\theta & Y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ -\rho\,\mathrm{sen}(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{vmatrix} = \rho$$

Finalmente:

$$\iint_H f(x,y)dxdy = \iint_D f\big(\vec{r}(\rho,\theta)\big)\rho\, d\rho d\theta$$

Ejemplo 1: Hallar el área del sector circular comprendido entre $x^2+y^2=16$, $x^2+y^2=36$ y las respectivas rectas que forman ángulos de $30°$ y $60°$ con el semieje x positivo.

Solución: Lo primero que se hace es graficar la región. Para ello se necesitan las ecuaciones de las rectas

Recta a $30°$: $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

Recta a $60°$: $y=\sqrt{3}\,x$

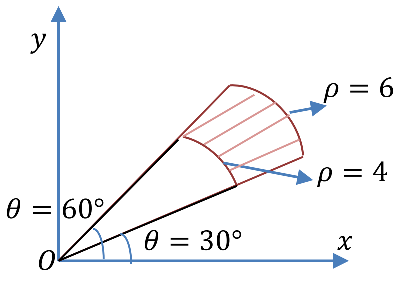


Figura 24

Según la Figura 24 los límites en coordenadas polares son

$$4 \le \rho \le 6 \qquad \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$$

Esto es, la aplicación $\vec{r}(\rho,\theta)$ transforma el rectángulo de la Figura 25 en el sector circular

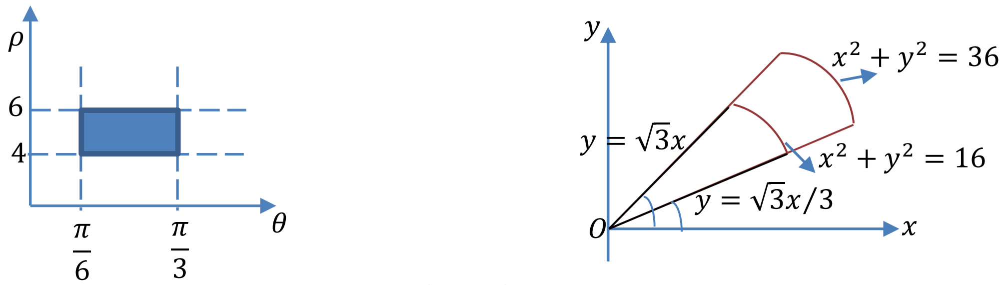


Figura 25

$$\iint_H dxdy = \iint_D \mathcal{J} d\rho d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_4^6 \rho d\rho \, d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\rho^2}{2}\bigg|_4^6 d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 10 d\theta = 10\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{5}{3}\pi$$

APLICACIONES FISICAS

No siempre el resultado de la integral doble es un volumen. Depende de la interpretación física de la función integrando los resultados tienen diferentes interpretaciones.

1) Masa de una lámina plana

Si la densidad de una lámina plana es $\delta(x,y)$ entonces

$$\delta(x,y) = \frac{dM}{dA} \qquad \Rightarrow \qquad dM = \delta(x,y)dA$$

$$M = \iint_H \delta(x,y)dxdy$$

Ejemplo: Calcular la masa de una lámina plana circular de radio 2 y densidad proporcional a la distancia al centro de la misma.

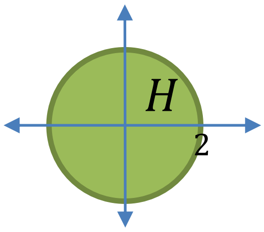


Figura 26

$$f(x,y) = \delta(x,y) = k\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\vec{r}(\rho,\theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\,\mathrm{sen}(\theta))$$

$$f(\vec{r}(\rho,\theta)) = k\sqrt{(\rho\cos(\theta))^2 + (\rho\,\mathrm{sen}(\theta))^2} = k\rho$$

$$\mathcal{J} = \rho$$

$$M = \iint_H k\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^2 k\rho\rho d\rho\, d\theta = k\int_0^{2\pi} \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^2 d\theta = \frac{8}{3}k\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{16}{3}k\pi$$

2) Centro de Masa de una lámina plana

Teniendo en cuenta la definición de centro de masa

$$x_G = \frac{1}{M}\iint_H x\,\delta(x,y)\,dxdy$$

$$y_G = \frac{1}{M}\iint_H y\,\delta(x,y)\,dxdy$$

Ejemplo: Calcular el centro de masa de la mitad derecha de la lámina plana del ejemplo anterior. Ayuda: Su masa es $M = \frac{8}{3}k\pi$ ¿Por qué?

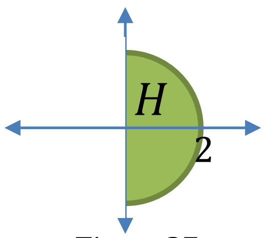


Figura 27

Comencemos calculando x_G:

$$f(x,y) = x\delta(x,y) = kx\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\vec{r}(\rho,\theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\,\mathrm{sen}(\theta))$$

$$f(\vec{r}(\rho,\theta)) = k\rho\,cos(\theta)\sqrt{(\rho\,cos(\theta))^2 + (\rho\,sen(\theta))^2} = k\rho^2\,cos(\theta)$$

$$\mathcal{J} = \rho$$

$$x_G = \frac{1}{M}\iint_H kx\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \frac{1}{M}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^2 k\rho^2\cos(\theta)\,\rho d\rho\, d\theta =$$

$$= \frac{k}{\frac{8}{3}k\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^2 \cos(\theta)\,d\theta = \frac{1}{\frac{8}{3}\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos(\theta)\,d\theta = \frac{3}{2\pi}\underbrace{(\mathrm{sen}(\theta))|_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{=2} = \frac{3}{\pi}$$

Calculemos y_G:

$$f(x,y) = y\delta(x,y) = ky\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\vec{r}(\rho,\theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\,\mathrm{sen}(\theta))$$

$$f(\vec{r}(\rho,\theta)) = k\rho\,\mathrm{sen}(\theta)\sqrt{(\rho\, cos(\theta))^2 + (\rho\, sen(\theta))^2} = k\rho^2\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$\mathcal{J} = \rho$$

$$y_G = \frac{1}{M}\iint_H ky\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \frac{1}{M}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^2 k\rho^2\,\mathrm{sen}(\theta)\,\rho d\rho\, d\theta =$$

$$= \frac{k}{\frac{8}{3}k\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^2 \mathrm{sen}(\theta)\,d\theta = \frac{1}{\frac{8}{3}\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\,\mathrm{sen}(\theta)\,d\theta = \frac{3}{2\pi}\underbrace{(-\cos(\theta))|_{-\pi/2}^{\pi/2}}_{=0} = 0$$

Por lo tanto, el centro de masa de la lámina plana es $(x_G, y_G) = \left(\frac{3}{\pi}, 0\right)$.

3) Momentos de Inercia

La definición general de momentos de inercia es

$$I_{\text{eje}} = \iint_H d^2(\text{eje})\,\delta(x,y)\,dxdy$$

siendo $d(\text{eje})$ la distancia del punto al eje con respecto al cual se mide el momento.

a) Respecto al eje x es

$$I_x = \iint_H y^2\,\delta(x,y)\ dxdy$$

b) Respecto al eje y es

$$I_y = \iint_H x^2\,\delta(x,y)\,dxdy$$

c) Respecto al eje z

$$I_z = \iint_H (x^2+y^2)\,\delta(x,y)\,dxdy$$

Ejemplo: Calcular el momento de inercia al girar respecto al eje x de la mitad superior de la lamina del ejemplo anterior

$$f(x,y) = y^2\delta(x,y) = y^2\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\vec{r}(\rho,\theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\,\mathrm{sen}(\theta))$$

$$f(\vec{r}(\rho,\theta)) = (\rho\,sen(\theta))^2\sqrt{(\rho\,cos(\theta))^2 + (\rho\,sen(\theta))^2} = \rho^3\,\mathrm{sen}^2(\theta)$$

$$\mathcal{J} = \rho$$

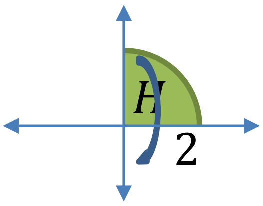


Figura 28

$$I_x = \iint_H y^2\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \iint_H \rho^3\,\mathrm{sen}^2(\theta)\,\rho d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^5}{5}\bigg|_0^2 \mathrm{sen}^2(\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{32}{5}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos(2\theta)}{2}d\theta = \frac{32}{5}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\mathrm{sen}(2\theta)}{4}\right)\bigg|_0^{\pi/2} = \frac{32}{5}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\mathrm{sen}(\pi)}{4}\right) = \frac{8}{5}\pi$$