CALCULO II

Ingeniería Mecánica

Ingeniería Electromecánica

Equipo de Cátedra

Profesor Titular	Dr. Javier Gimenez
Profesor Adjunto	Dr. Emanuel Tello
Jefe de Trabajos Prácticos	Ing. Cristian Bustos

AÑO 2026

SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS LINEALES A COEFICIENTES CONSTANTES

INTRODUCCIÓN

Hasta ahora hemos estudiado modelos matemáticos descritos mediante una sola ecuación diferencial. Sin embargo, hay modelos físicos cuyo modelo matemático está constituido por más de una ecuación diferencial.

Problema 1: Redes

Una red eléctrica que tiene más de una malla da lugar a ecuaciones diferenciales simultáneas. Como se ve en la Figura 1 la corriente i_1 se divide en las direcciones que se muestran en el punto B_1 llamado punto de ramificación de la red o nodo. Según la primera ley de Kirchhoff se puede escribir

$$i_1 = i_2 + i_3 \qquad (1)$$

Además, se puede aplicar la segunda ley de Kirchhoff a cada malla. Para la malla $A_1B_1B_2A_2A_1$, si sumamos la caída de voltaje a través en cada uno de sus elementos llegamos a

$$E(t) = i_1R_1 + L_1\frac{di_2}{dt} + i_2R_2 \qquad (2)$$

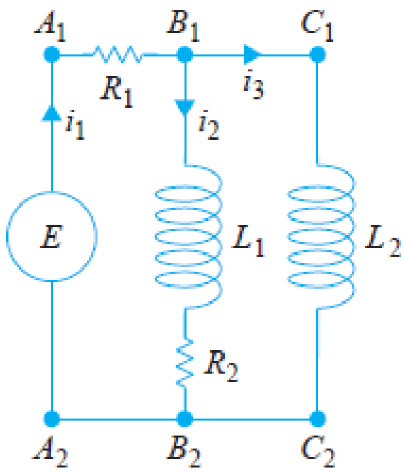

Figura 1

De igual manera para el circuito $A_1B_1C_1C_2B_2A_2A_1$ tenemos que

$$E(t) = R_1 i_1 + L_2 \frac{di_3}{dt} \qquad (3)$$

Usando la relación (1) en (2) para eliminar i_1 se tiene

$$E(t) = R_1(i_2 + i_3) + L_1 \frac{di_2}{dt} + i_2 R_2$$

$$E(t) = L_1 \frac{di_2}{dt} + (R_2 + R_1) i_2 + R_1 i_3 \qquad (4)$$

Sustituyendo (1) en (3) se obtiene

$$E(t) = R_1(i_2 + i_3) + L_2 \frac{di_3}{dt}$$

$$E(t) = R_1 i_2 + L_2 \frac{di_3}{dt} + R_1 i_3 \qquad (5)$$

De esta forma se obtienen dos ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes para las corrientes i_2, i_3 (4) y (5) que se cumplen en forma simultánea. Luego podemos escribir el sistema

$$\begin{cases} L_1 \dfrac{di_2}{dt} + (R_2 + R_1) i_2 + R_1 i_3 = E(t) \\ R_1 i_2 + L_2 \dfrac{di_3}{dt} + R_1 i_3 = E(t) \end{cases} \qquad (6)$$

Problema 2: Sistema Masa Resorte

Sean tres resortes y dos masas colocados como en la Figura 2, estudiar su movimiento. Suponemos que deslizan sobre una superficie horizontal y lisa, por lo que despreciamos la fuerza de rozamiento. Por tanto, las únicas fuerzas a tener en cuenta son las fuerzas de recuperación elástica de los resortes.

Las coordenadas x_1, x_2 posicionan a las masas m_1, m_2, siendo la posición de equilibrio, $x_1 = 0, x_2 = 0$ cuando los resortes k_1, k_2, k_3 permanecen sin estiramiento ni compresión

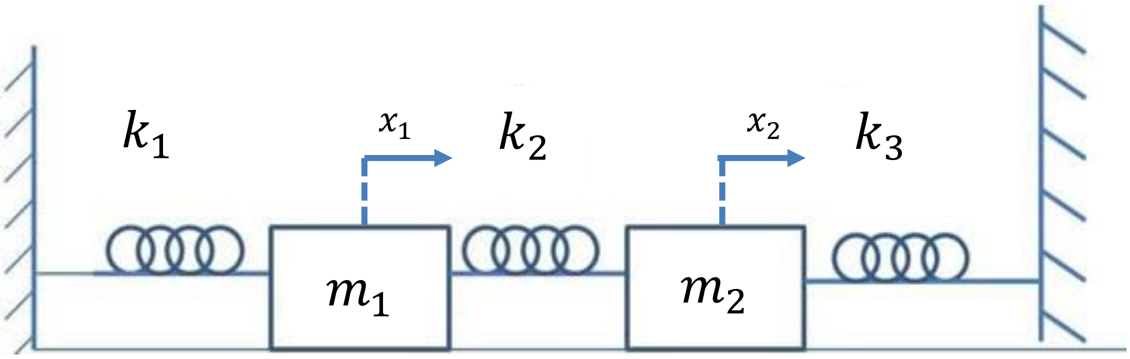

Figura 2

Se analiza el caso en que $x_2 > x_1$, que corresponde al caso en que el resorte k_1 está estirado una distancia x_1 , k_2 está estirado $x_2 - x_1$, y k_3 está comprimido x_2. Teniendo en cuenta la ley de Hooke, la fuerza ocasionada por cada resorte es proporcional a su elongación. Luego:

- Sobre la masa m_1 actúa la fuerza del resorte k_1 que tiende a contraerse ejerciendo una fuerza hacia la izquierda k_1x_1. El resorte k_2 también se contrae tirando hacia la derecha con una fuerza $k_2(x_2 - x_1)$. Aplicando la segunda ley de Newton tenemos
$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \qquad (7)$$
- Sobre la masa m_2 actúan los resortes k_2 y k_3. El resorte k_2 tira hacia la izquierda ejerciendo una fuerza $k_2(x_2 - x_1)$ y al estirarse el resorte k_3 empuja a la masa m_2 también hacia la izquierda, con una fuerza k_3x_2, quedando la ecuación de movimiento
$$m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - k_3x_2 \qquad (8)$$

Las ecuaciones (7) y (8) determinan las ecuaciones de movimiento del sistema dado mediante un sistema de E.D.L. de orden 2 con coeficientes constantes dado por

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - k_3x_2 \end{cases}$$

Estos y muchos otros problemas reales nos muestran la necesidad de estudiar la resolución de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Definición:

Un sistema de Ecuaciones diferenciales ordinarias consiste en dos o más ecuaciones diferenciales de dos o más funciones desconocidas de una sola variable independiente

Ejemplo:

$$\begin{cases} x' - 3x + y' + z' = 3 \\ x' \qquad - y' + 2z' = t^2 \\ \qquad x + y' - 6z' = z - 1 \end{cases}$$

Solución de un Sistema

Una solución de un sistema de Ecuaciones Diferenciales es un conjunto de funciones suficientemente diferenciales que satisfacen cada una de las ecuaciones diferenciales del sistema en un intervalo común I.

Métodos De Solución De Sistemas De Ecuaciones Diferenciales

Veremos en este curso solamente dos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

- ### Sustitución :

Este método se basa en despejar de una ecuación y reemplazar en la otra de tal manera que resulta una ecuación diferencial en una sola función desconocida

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} x' - 4x + y'' = t^2 \\ x' + x + y' = 0 \end{cases} \qquad (9)$$

Si observamos el sistema, podemos ver que nos conviene despejar y' de la segunda ecuación, derivar la expresión obtenida y así reemplazar y'' en la primera ecuación. En efecto:

$$y' = -x' - x \qquad (10)$$

Derivando miembro a miembro (10) y reemplazando en la primera ecuación del sistema (9) se obtiene:

$$y'' = -x'' - x'$$

$$x' - 4x + (-x'' - x') = t^2$$

Reordenando la ecuación obtenemos:

$$x'' + 4x = -t^2 \qquad (11)$$

Siendo el resultado una ecuación diferencial de segundo orden que ya sabemos resolver

a) Primero se obtiene la solución de la homogénea asociada a (11) que será:

$$x_H = C_1 \cos(2t) + C_2 \operatorname{sen}(2t)$$

b) Se obtiene la solución particular por el método de los coeficientes indeterminados. Como el segundo miembro es un polinomio de segundo grado se ensaya un polinomio completo de segundo grado

$$x_P = At^2 + Bt + C$$

Derivando se obtiene:

$$x_P = At^2 + Bt + C$$

$$x_P' = 2At + B$$

$$x_P'' = 2A$$

Luego reemplazando en (11) se obtiene: $\quad 2A + 4(At^2 + Bt + C) = -t^2$

$$\begin{cases} 4A = -1 \\ 4B = 0 \\ 2A + 4C = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} A = -1/4 \\ B = 0 \\ C = 1/8 \end{array}$$

Luego la solución particular es.

$$x_P = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}$$

c) La solución general será

$$x_G = x_H + x_P$$

$$x_G = C_1\cos(2t) + C_2\text{sen}(2t) - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8} \qquad (12)$$

Una vez obtenida la función $x(t)$ se reemplaza en (10) y sí se obtiene la otra función $y(t)$. En efecto

$$y' = -x' - x$$

$$y' = -\left(-2C_1\,\text{sen}(2t) + 2C_2\cos(2t) - \frac{1}{2}t\right) - \left(C_1\cos(2t) + C_2\text{sen}(2t) - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}\right)$$

$$y' = (-2C_2 - C_1)\cos(2t) + (2C_1 - C_2)\text{sen}(2t) + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}$$

$$y = \left(-C_2 - \frac{1}{2}C_1\right)\text{sen}(2t) + \left(-C_1 + \frac{1}{2}C_2\right)\cos(2t) + C_3 + \frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t \qquad (13)$$

Por lo tanto, la solución del sistema es el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = C_1\cos(2t) + C_2\text{sen}(2t) - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8} \\ y = \left(-C_2 - \frac{1}{2}C_1\right)\text{sen}(2t) + \left(C_1 - \frac{1}{2}C_2\right)\cos(2t) + C_3 + \frac{1}{12}t^3 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t \end{cases}$$

Método de los operadores

Aprendamos el método a través de ejemplos

Ejemplo 2:

Sea el sistema

$$\begin{cases} x' + 2x - 8y = t \\ -2x + y' + 2y = 0 \end{cases} \qquad (14)$$

Si expresamos cada ecuación en términos del operador de derivada D tenemos:

$$\begin{cases} (D+2)x - 8y = t \\ -2x + (D+2)y = 0 \end{cases} \qquad (15)$$

Realizando un procedimiento similar al de la eliminación Gaussiana, se multiplican convenientemente ambas ecuaciones de modo tal que en ambas ecuaciones queden iguales los términos correspondiente a una de las funciones incógnitas. Por ejemplo, si multiplicamos por -2 a la primer ecuación de (15) y multiplicamos por $D+2$ a la segunda ecuación de (15), resulta

$$\begin{cases} -2(D+2)x + 16y = -2t \\ -2(D+2)x + (D+2)^2 y = 0 \end{cases}$$

Restando ambas ecuaciones resulta

$$16y - (D+2)^2 y = -2t \quad \Rightarrow \quad -16y + (D^2+4D+4)y = 2t$$

$$\Rightarrow \quad (D^2+4D-12)y = 2t \quad \Rightarrow \quad y'' + 4y' - 12y = 2t \qquad (16)$$

Hallemos la solución homogénea

$$r^2 + 4r - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} r_1 = 2 \\ r_2 = -6 \end{matrix}$$

Luego

$$y_H = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-6t}$$

Por otro lado, la particular a ensayar será

$$y_P = At + B \qquad y'_P = A \qquad y''_P = 0$$

Reemplazando en la E. D. (16) resulta

$$4A - 12(At + B) = 2t$$

$$\begin{cases} -12A = 2 \\ 4A - 12B = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} A = -1/6 \\ B = -1/18 \end{matrix}$$

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-6t} - \frac{1}{6}t - \frac{1}{18} \qquad (17)$$

Una vez hallada y, se puede proceder de diferentes maneras de acuerdo al caso. Una opción es trabajar del mismo modo que cuando se aplicó sustitución. Para ello, por ejemplo, se puede reemplazar (17) en la segunda ecuación de (14), obteniendo

$$-2x + y' + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}y' + y$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(2C_1 e^{2t} - 6C_2 e^{-6t} - \frac{1}{6}\right) + C_1 e^{2t} + C_2 e^{-6t} - \frac{1}{6}t - \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow \quad x = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-6t} - \frac{1}{6}t - \frac{5}{36} \qquad (18)$$

Otra opción es hallar x aplicando el mismo procedimiento empleado para hallar y, pero en este caso multiplicando la primer ecuación de (15) por $D+2$ y la segunda por -8, resultando:

$$\begin{cases} (D+2)^2x - 8(D+2)y = (D+2)t \\ 16x - 8(D+2)y = 0 \end{cases}$$

Restando ambas ecuaciones, y usando que $(D+2)t = Dt + 2t = 1 + 2t$, resulta

$$(D+2)^2x - 16x = (D+2)t \quad \Longrightarrow \quad (D^2 + 4D - 12)x = 1 + 2t$$

$$\Longrightarrow \quad x'' + 4x' - 12x = 1 + 2t \qquad (19)$$

Hallemos la solución homogénea

$$r^2 + 4r - 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} r_1 = 2 \\ r_2 = -6 \end{matrix}$$

Luego

$$x_H = C_3e^{2t} + C_4e^{-6t}$$

Note que hemos utilizado constantes distintas, ya que no tienen por qué ser iguales a las constantes C_1 y C_2 usadas en (17).

La particular se obtiene ensayando una particular de la forma:

$$x_P = At + B \qquad x'_P = A \qquad x''_P = 0$$

Reemplazando en la ecuación diferencial (19)

$$4A - 12(At + B) = 2t + 1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} -12A = 2 \\ 4A - 12B = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} A = -1/6 \\ B = -5/36 \end{matrix}$$

Luego la solución particular será

$$x_P = -\frac{1}{6}t - \frac{5}{36}$$

La solución general para x será

$$x = C_3e^{2t} + C_4e^{-6t} - \frac{1}{6}t - \frac{5}{36} \qquad (20)$$

Comparando (18) y (20) vemos la misma estructura de solución con distintas constantes arbitrarias. La solución (18) usa las constantes de la solución para y dada en (17), en cambio la solución (20) usa nuevas constantes, las cuales deber ser vinculadas a las constantes C_1 y C_2. Una forma directa de hacer esto es igualando las constantes de (18) con las de (20) para darnos cuenta que $2C_1 = C_3$ y $-2C_2 = C_4$, pero en general si optamos por hallar la solución (20) a través de la segunda opción, es porque no conocemos la solución (18). En este caso tenemos que reemplazar (20) y (17) en algunas de las ecuaciones del sistema original (14). Por ejemplo, si se reemplaza en la segunda ecuación se tiene:

$$\begin{array}{rrrr} & -2x = -2C_1e^{2t} & -2C_2e^{-6t} & +\frac{1}{3}t+\frac{5}{18} \\ + & y' = 2C_3e^{2t} & -6C_4e^{-6t} & -\frac{1}{6} \\ & 2y = 2C_3e^{2t} & +2C_4e^{-6t} & -\frac{1}{3}t-\frac{1}{9} \\ \hline & 0 = (-2C_1+4C_3)e^{2t} & +(-2C_2-4C_4)e^{-6t} & +0t+0 \end{array}$$

Para que se verifique la identidad resultante debe verificarse que

$$\begin{cases} -2C_1+4C_3=0 \\ -2C_2-4C_4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} C_3 = \frac{C_1}{2} \\ C_4 = -\frac{C_2}{2} \end{array}$$

Luego el sistema solución es

$$\begin{cases} x_G = C_1e^{2t}+C_2e^{-6t}-\frac{1}{6}t-\frac{5}{36} \\ y_G = \frac{1}{2}C_1e^{2t}-\frac{1}{2}C_2e^{-6t}-\frac{1}{6}t-\frac{1}{18} \end{cases}$$

Continuación del Ejemplo 1: Mostremos el método usando nuevamente el sistema (9)

$$\begin{cases} x'-4x+y''=t^2 \\ x'+x+y'=0 \end{cases}$$

Si expresamos cada ecuación usando el operador de derivada D tenemos:

$$\begin{cases} (D-4)x+D^2y=t^2 \\ (D+1)x+Dy=0 \end{cases}$$

Al igual que cuando resolvimos por sustitución, hallemos primero x para luego hallar y para comparar los resultados hallados por ambos métodos. Tenemos que multiplicar ambas ecuaciones y restarlas para eliminar a y. Note que alcanza con multiplicar solamente a la segunda ecuación por D para luego restar, obteniendo:

$$\begin{cases} (D-4)x+D^2y=t^2 \\ (D+1)Dx+D^2y=0 \end{cases} \Rightarrow \quad (D-4)x-(D+1)Dx=t^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (-D^2-4)x=t^2 \quad \Rightarrow \quad x''+4x=-t^2$$

Esta ecuación coincide con la hallada al aplicar sustitución en (11), por lo que a partir de este punto se puede repetir el procedimiento empleado anteriormente y hallar la solución dada por (12) y (13).

Ejercicios de Aplicación:

Ejercicio: Resolver el Problema 1 de Redes Eléctricas considerando las siguientes constantes: $L_1 = L_2 = 1$; $R_1 = 160$; $R_2 = 240$.

Ejercicio: Resolver el Problema 2 del Sistema con dos masas considerando las siguientes constantes: $m_1 = m_2 = k_1 = k_2 = k_3 = 1$.

Ejercicio: Los motores de corriente continua (DC: direct current) son dispositivos que generan una fuerza mecánica a partir de aplicarles una determinada tensión eléctrica. Estas máquinas eléctricas son muy útiles en cualquier campo de la ingeniería ya que la energía mecánica producida puede ser utilizada para mover maquinarias pesadas, tracciones, movimiento de brazos robóticos, movimiento y traslación de elementos, grúas, etc.

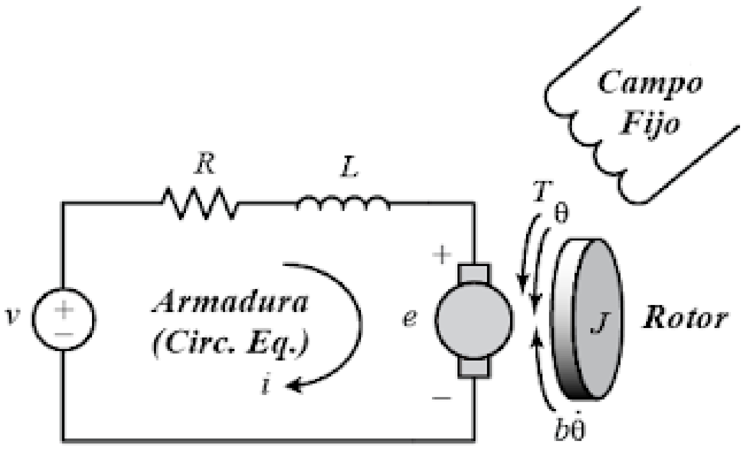

Figura 1. Motor DC.

Los modelos matemáticos permiten representar las leyes físicas que gobiernan un sistema dinámico mediante **ecuaciones diferenciales**. La Figura 1 muestra el modelo de un motor DC serie cuyo modelo matemático tiene una parte eléctrica y otra mecánica. Luego se tiene un **sistema** de ecuaciones diferenciales que en conjunto modelan el motor DC:

$$\begin{cases} L\,\dfrac{di(t)}{dt} + R\,i(t) = V(t) - E & (1) \\ J\,\dfrac{d^2\theta(t)}{dt^2} + b\,\dfrac{d\theta(t)}{dt} = K\,i(t) & (2) \end{cases}$$

La ecuación (1) representa la parte eléctrica del modelo, en donde se tiene una resistencia R y una inductancia L correspondiente al bobinado de armadura del motor en el cual circula una determinada corriente $i(t)$. En el miembro derecho de (1), $V(t)$ es la tensión aplicada en los bornes del mismo, la cual genera una fuerza contra electro motriz (f.c.e.m.) denotada con E. Por la ley de Faraday-Lenz, esta f.c.e.m. que se induce en el bobinado del rotor se opone a la causa que la genera, y por ende, E aparece restando a la tensión en bornes del motor $V(t)$.

La ecuación (2) representa la parte mecánica del motor expresada en términos de la posición angular $\theta(t)$. Luego se tiene el momento de inercia del rotor J y una constante o coeficiente de fricción del mismo b. Esta ecuación diferencial tiene como entrada de referencia el torque o cupla motora $K.i(t)$, donde K es una constante del sistema. Se puede demostrar que la f.c.e.m. E de (1) también puede expresarse en función de la velocidad angular como

$$E = K\,\frac{d\theta(t)}{dt}$$

Realizar las siguientes actividades:

a) Determinar las incógnitas del problema. ¿Son constantes o funciones?
b) Despejar la corriente en (2) y reemplazarla en (1). Debería obtener una EDO de tercer orden con $\theta(t)$ como única incógnita.
c) Hallar $\theta(t)$ sabiendo que $R = 6\Omega$, $J = 1$, $b = 1$, $L =$ 1H, $K = 2$, y usando $V(t) =$ 10V.
d) Utilizar la relación hallada en b) para hallar la corriente.
e) Si inicialmente la posición y velocidad angular del motor son 0, y la corriente inicial es de 13A. Hallar la solución única del problema.
f) Analice la solución obtenida. ¿Qué representan $\theta(t)$, $\theta'(t)$ y $\theta''(t)$ físicamente?
g) Si $t \to \infty$, ¿qué sucede con $\theta(t)$, $\theta'(t)$, $\theta''(t)$ e $i(t)$? ¿Por qué?
h) Repetir el ítem e) usando otra posición angular inicial. ¿Qué relación hay entre las soluciones del sistema? ¿Por qué sucede esto?
i) Replantear y resolver el sistema (1)-(2) usando como incógnitas a $\omega(t) = \theta'(t)$ e $i(t)$. ¿Qué relación hay con las soluciones halladas anteriormente?