# CALCULO II

## Ingeniería Mecánica
## Ingeniería Electromecánica

Equipo de Cátedra


| | |
|---|---|
| Profesor Titular | Dr. Javier Gimenez |
| Profesor Adjunto | Dr. Emanuel Tello |
| Jefe de Trabajos Prácticos | Ing. Cristian Bustos |


AÑO 2026

# INTEGRALES CURVILÍNEAS

## CURVAS

1) Curvas en $\mathbb{R}^2$ (plano) se pueden definir en forma explícita, en forma implícita, y en forma paramétrica.
   a) Forma explícita $y = f(x)$
      Ejemplo:

$$y = x^2 + 1$$

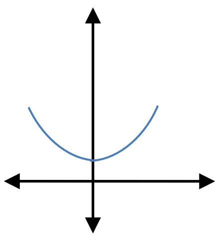


Figura 1

   b) Forma Implícita $F(x, y) = 0$
      Ejemplo:

$$x^2 + y^2 = 4$$

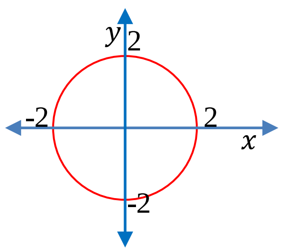



Figura 2

   c) Forma Paramétrica: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

      Ejemplo: Siguiendo con el ejemplo de la Figura 1, $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$

      Ejemplo: Siguiendo con el ejemplo de la Figura 2, $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\,\mathrm{sen}\, t \end{cases}$

2) Curvas en el espacio $\mathbb{R}^3$: Las curvas se definen como intersección de dos superficies o en forma paramétrica.
   a) Intersección de superficies:
      Ejemplo: En la Figura 3 se muestra la intersección del plano (paralelo al eje $x$) con el cilindro, y la Figura 4 es la curva $C$ que resulta de dicha intersección, es una elipse

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

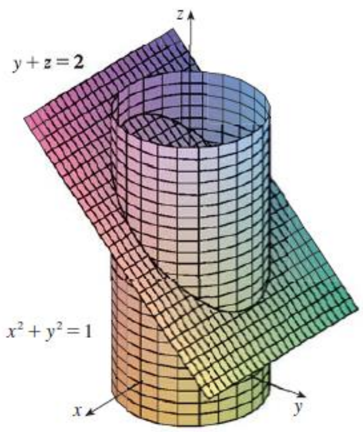



Figura 3

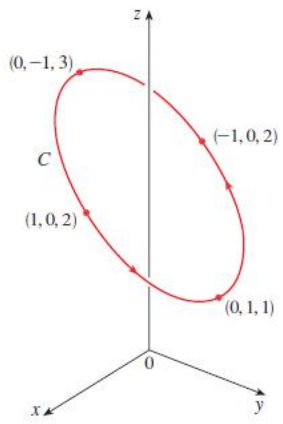



Figura 4

b) Representación Paramétrica: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

Ejemplo:
Conviene utilizar otras coordenadas distintas de las cartesianas como las polares, debido a que la proyección de la curva en el plano $xy$ es una circunferencia de radio 1 al igual que el cilindro. Lo que varía de un punto de la curva a otro es la altura de cada punto determinada por el plano $2 = y + z$. Note que en el espacio obtenemos la elipse.

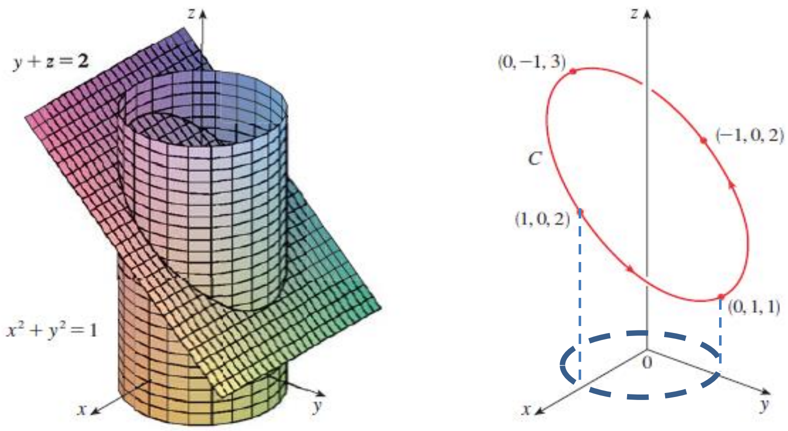



Figura 5

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \operatorname{sen}(t) \\ z = 2 - \operatorname{sen}(t) \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

**<u>NOTA:</u>** La curva es la representación gráfica de una función de ***una variable independiente***, ya sea expresada en forma explícita, implícita o en forma paramétrica.

**Definición:** Una curva es una función $\vec{r}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ cuya gráfica se denomina arco.

Si bien los conceptos de curva y arco son en esencia distintos, se suelen usar como sinónimos.

En una curva, a cada número real $t$ se le hace corresponder un vector en el espacio (generalmente de dimensión 2 o 3). Este vector se denomina vector posición y se denota $\vec{r}(t)$. Al variar $t$ el lugar geométrico que une los puntos extremos de los distintos vectores posiciones del espacio conforman un arco.

Trabajaremos en $\mathbb{R}^3$ por simplicidad, aunque la mayoría de los conceptos admiten una generalización trivial a $\mathbb{R}^m$.

Ya sabemos que toda curva se puede expresar en forma paramétrica de la forma

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Luego las funciones de la representación paramétrica serán las componentes de $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t) = x(t)\check{\imath} + y(t)\check{\jmath} + z(t)\check{k}$$

En la práctica generalmente se trabaja con una porción de curva, por lo que se usa el dominio $I = [a, b]$. A los puntos $\vec{r}(a) = A$ y $\vec{r}(b) = B$ se los denomina respectivamente punto inicial y punto final de la curva, o los extremos de la curva.

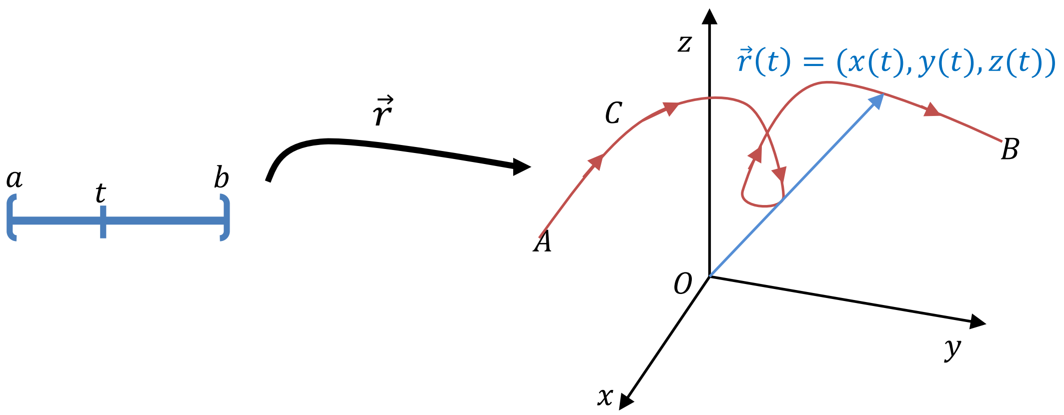



Figura 6

Observaciones:

- Se puede pensar a la curva $C$ como una deformación o transformación de un intervalo recto $[a, b]$.
- Las funciones $x(t)$ , $y(t)$, y $z(t)$ son funciones cuyo resultado es un número, esto es, son Campos Escalares.
- Una curva acepta infinitas parametrizaciones.

- Se usa la variable $t$ para denotar la variable independiente porque representa el tiempo en la mayoría de las aplicaciones en la física.

Como las componentes de una curva son funciones escalares, todo lo visto para Campos Escalares se puede extender para curvas.

## 1) Límite

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \lim_{t \to t_0} x(t)\hat{e}_1 + \lim_{t \to t_0} y(t)\hat{e}_2 + \lim_{t \to t_0} z(t)\hat{e}_3$$

## 2) Continuidad

Una curva es continua en $t = t_0$ si lo son cada una de las funciones componentes. Una curva es continua si es continua en todos los puntos de su dominio.

**Ejemplo:** Las componentes de la curva

$$\vec{r}(t) = \left(\ln(t)\,, \sqrt{1-t}\right)$$

están definidas respectivamente para valores de $t > 0$ y para $t \leq 1$, por lo que el dominio de la curva es el intervalo $(0,1]$. En este dominio la curva es continua.

## 3) Derivada

Se trabaja con derivadas totales porque las funciones componentes dependen de una sola variable.

$$\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{e}_1 + \frac{dy(t)}{dt}\hat{e}_2 + \frac{dz(t)}{dt}\hat{e}_3$$

Otra notación

$$\vec{r}'(t) = \left(x'(t), y'(t), z'(t)\right)$$

Interpretemos geométricamente el concepto de derivada de una curva.

La derivada $\vec{r}'$ está definida de la misma forma que para las funciones de valores reales:

***La derivada es el límite de un cociente incremental***

Luego se define el incremento de la función como

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

Cuya interpretación geométrica es: si el vector posición $\vec{r}(t)$ tiene como extremo el puno $P$ y $\vec{r}(t + \Delta t)$ tiene por extremo el punto $Q$, el vector $\Delta\vec{r}$ es el vector secante que une los puntos $P\ y\ Q$. A medida que el incremento $\Delta t$ disminuye, el vector secante se acerca más a la curva hasta transformarse en vector tangente en el límite del cociente incremental cuando $\Delta t \to 0$, que no es otra cosa que la derivada de $\vec{r}(t)$ en el punto $P$ (ver Figura 7).

$$\vec{r}\,' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

El vector $\vec{r}\,'$ tiene la dirección de la tangente a la curva $C$ en el punto $P$ y el sentido de crecimiento del parámetro

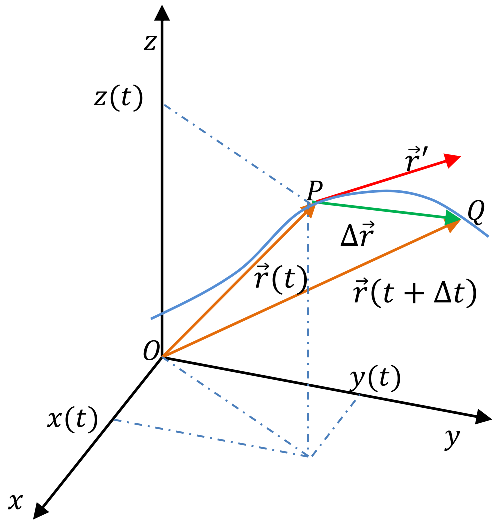



Figura 7

## 4) Diferencial

Una función vectorial es suma de campos escalares por los versores, luego por la propiedad que dice ***"la diferencial de la suma es la suma de diferenciales"*** se tiene

$$\vec{r}(t) = x(t)\breve{\imath} + y(t)\breve{\jmath} + z(t)\breve{k}$$

$$d\vec{r}(t) = dx(t)\breve{\imath} + dy(t)\breve{\jmath} + dz(t)\breve{k}$$

Se dice que una curva es diferenciable si sus componentes ($x(t), y(t), z(t)$ en este caso) son diferenciables. En tal caso:

$$d\vec{r}(t) = x'(t)dt\,\breve{\imath} + y'(t)dt\breve{\jmath} + z'(t)dt\breve{k}$$

$$d\vec{r}(t) = \left(x'(t)\,\breve{\imath} + y'(t)\breve{\jmath} + z'(t)\breve{k}\right)dt$$

$$d\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t)dt$$

$$\|d\vec{r}(t)\| = \|\vec{r}\,'(t)\|dt \qquad (1)$$

## Definiciones

### Punto Regular

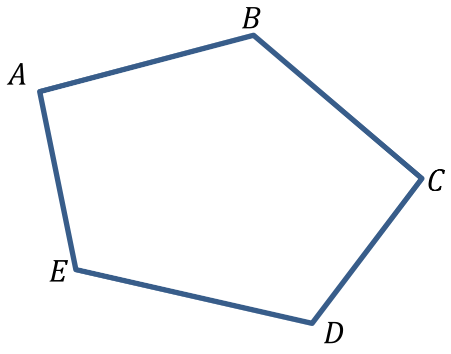
Una curva $\vec{r}(t)$ es regular en un punto $t_0$ si $\vec{r}'$ es continua en $t_0$ y $\vec{r}'(t_0) \neq 0$

### Curva Regular

Una curva es regular si lo es en cada uno de sus puntos

### Curva Regular a trozos

Una curva es regular a trozos si el intervalo $[a, b]$ se puede descomponer en un número finito de sub intervalos en los cuales la curva es regular (ver Figura 8)




$C: \widehat{AB} \cup \widehat{BC} \cup \widehat{CD} \cup \widehat{DE} \cup \widehat{EA}$

Figura 8

### Curva Simple

Una curva $\vec{r}: [a, b] \to \mathbb{R}^m$ es simple si es inyectiva en $[a, b)$, esto es: **NO** existe un punto $D$ como el de la Figura 9 donde $\vec{r}(t_i) = \vec{r}(t_j) = D$ para valores distintos $t_i$ y $t_j$ del parámetro.

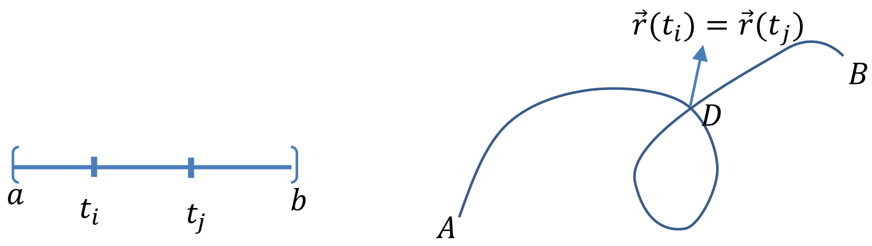



Figura 9

**Curva Cerrada**

Una curva $\vec{r}:[a,b] \to \mathbb{R}^m$ es cerrada cuando $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$

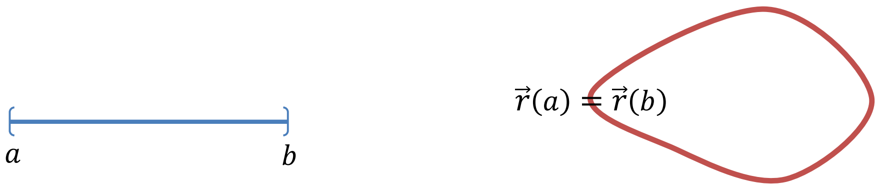



Figura 10

**Curva de Jordan**

Una curva es de Jordan cuando es regular y simple.

## *Longitud de Arco*

Sea $C$ el arco (gráfica de una curva) de una curva regular definida sobre un intervalo $[a,b]$. Si se hace una partición del intervalo (ver Figura 11) se puede observar que mientras más fina sea la partición, más se aproximan la longitud de un elemento de arco y la cuerda correspondiente, esto es: $\Delta s_i \cong \|\Delta \vec{r}_i\|$

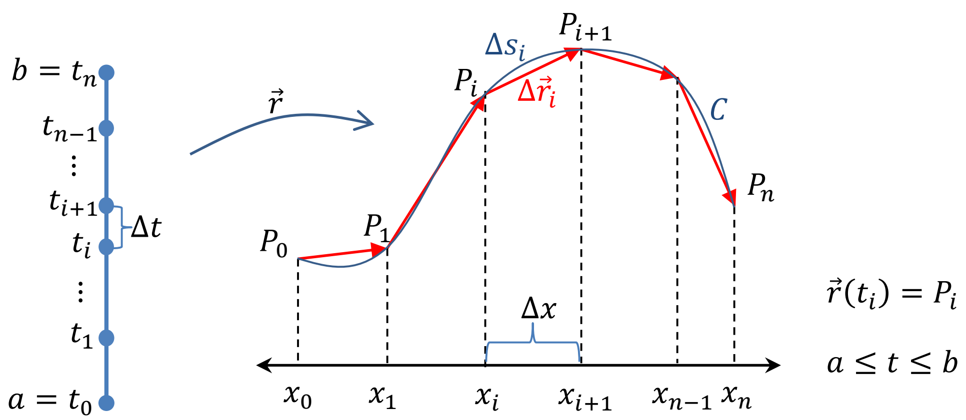



Figura 11

La longitud de la curva $C$ viene dada por

$$L = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta s_i \qquad (2)$$

Si ampliamos un elemento $\Delta s_i$ y asumimos una curva plana se obtiene lo diagramado en la Figura 12

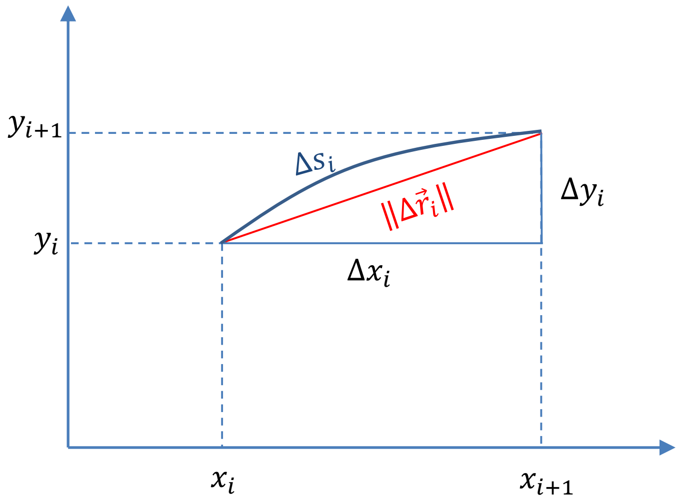



Figura 12

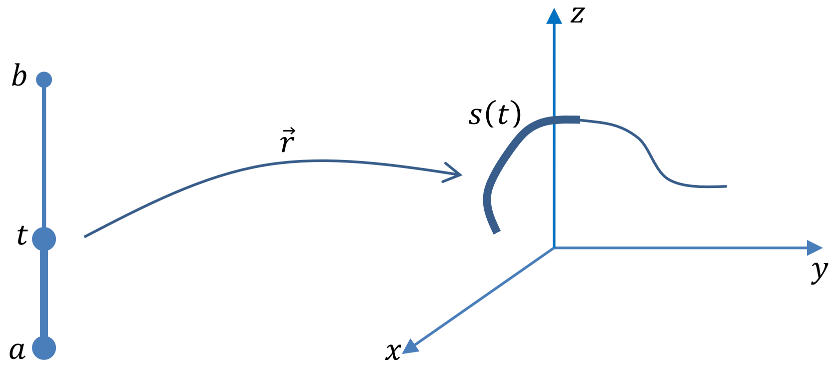
Como $\Delta s_i \cong \|\Delta\vec{r}_i\| = \sqrt{\Delta x_i^{\,2} + \Delta y_i^{\,2}}$ luego por (2)

$$L \cong \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\Delta x_i^{\,2} + \Delta y_i^{\,2}} = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right)^2}\, \Delta t_i$$

Considerando una partición donde todos los $\Delta t_i$ son iguales a $\Delta t$, y tomando límite para hacer cada intervalo de la partición infinitamente pequeño, resulta

$$L = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t}\right)^2}\, \Delta t = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_a^b \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt$$

Luego, la longitud de arco desde el instante inicial $a = t_0$ hasta un valor de $t$ cualquiera será




$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\vec{r}\,'(\tau)\|\, d\tau$$

Esta función se conoce como función de longitud de arco, la cual al ser derivada

$$ds = \|\vec{r}'(t)\|dt \qquad (3)$$

De (1) y (3) se cumple

$$ds = \|d\vec{r}(t)\|$$

Estos resultados son muy importantes y serán los que utilizaremos al resolver integrales curvilíneas

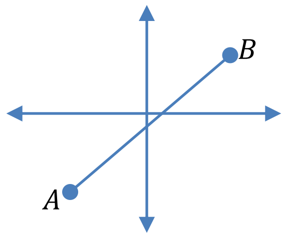
**Ejemplo 1:** Hallar la longitud del segmento comprendido entre dos puntos genéricos $A(x_0, y_0)$ y $B = (x_1, y_1)$.

Solución: Pasos a seguir:

a) Graficar
b) Parametrizar la curva indicando la variación del parámetro
c) Cálculo de la integral

La parametrización del segmento de recta que une ambos puntos será

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1$$




Vectorialmente: $\vec{r}(t) = \big(x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0)\big)$

El parámetro varía entre 0 y 1 siendo $\vec{r}(0) = A$ y $\vec{r}(1) = B$.

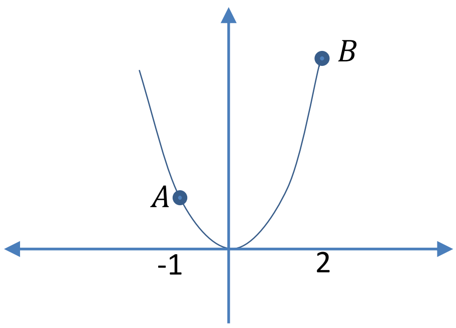
$\vec{r}'(t) = (x_1 - x_0,\ y_1 - y_0)$

$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$

$$L = \int_0^1 \|B - A\|\, dt = \|B - A\| \int_0^1 dt = \|B - A\|$$

**Ejemplo 2:** Hallar la longitud del arco de curva $y = x^2$ comprendida entre los puntos $A(-1,1)$ y $B(2,4)$

Solución:




$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad -1 \le t \le 2 \qquad \vec{r}(t) = (t, t^2)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 2t \end{cases} \qquad \vec{r}'(t) = (1, 2t)$$

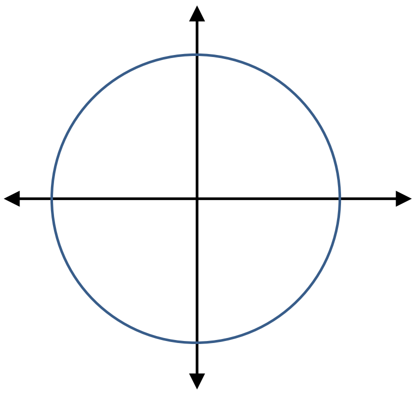
$$ds = \|\vec{r}'(t)\|dt = \sqrt{1 + 4t^2}\, dt$$

$$L = \int_{-1}^{2} \sqrt{1 + 4t^2}\, dt = \cdots \text{(Ejercicio)}$$

**Ejemplo 3:** Hallar el perímetro de una circunferencia de radio 3.

<u>Solución</u>

Por ser circunferencia conviene parametrizarla usando coordenadas polares



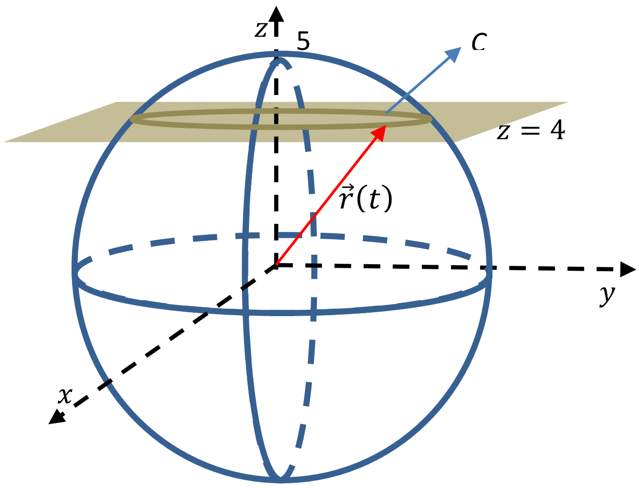
$$\begin{cases} x = 3\cos(t) \\ y = 3\,\mathrm{sen}(t) \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -3\,\mathrm{sen}(t) \\ \dot{y} = \ 3\cos(t) \end{cases} \quad \|\vec{r}\,'(t)\| = 3$$

$$L = \int_0^{2\pi} 3dt = 3t\Big|_0^{2\pi} = 6\pi$$

**Ejemplo 4**: Hallar la longitud de la curva que es intersección de las superficies

$$S_1 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 25 \quad y \quad S_2 : \ z = 4$$




$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ z = 4 \end{cases}$$

Reemplazo el valor de z en la ecuación de la esfera

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$\begin{cases} x = 3\cos(t) \\ y = 3\,\mathrm{sen}(t) \\ z = 4 \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Luego

$$\vec{r}(t) = (3\cos(t)\,, 3\,\mathrm{sen}(t)\,, 4)$$

$$\vec{r}\,'(t) = (-3\,\mathrm{sen}(t)\,, 3\cos(t)\,, 0) \qquad \|\vec{r}\,'(t)\| = 3$$

$$L = \int_0^{2\pi} 3dt = 6\pi$$

**Hélice Circular**: La hélice circular se genera por el movimiento de un punto de una circunferencia que gira en sentido anti horario alrededor de su centro, el cual se desplaza sobre el eje $z$ perpendicular al plano de la circunferencia.

Hay dos movimientos uniformes: uno de rotación y otro de traslación. Al dar un giro completo se incrementa la altura una cierta cantidad llamada paso $P$.

Se podría decir que el punto se desplaza sobre las paredes de un cilindro. Supongamos que la circunferencia es de radio $a$, entonces la representación paramétrica sería

$$\begin{cases} x = a\cos(t) & \\ y = a\,\mathrm{sen}(t) & \text{rotación} \\ z = bt & \text{traslación} \end{cases}$$

Cuando $t = 2\pi$ resulta $z = P$, entonces $P = 2\pi b \implies b = \frac{P}{2\pi}$

Dependiendo del enunciado, a veces dan el valor de $b$ y se debe calcular el paso $P$, o viceversa.

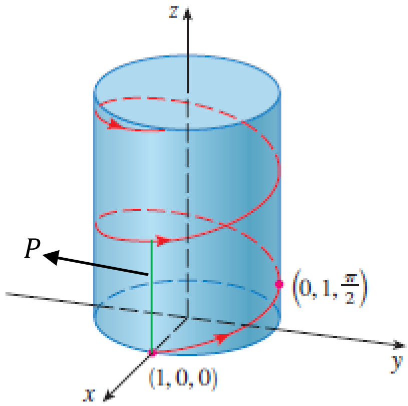
**Ejemplo 5:** Hallar la longitud de un ciclo completo de una hélice circular con un paso de $P = 2\pi$ que se apoya en un cilindro de radio 1.

$$b = \frac{\overbrace{2\pi}^{P}}{2\pi} = 1$$

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \mathrm{sen}(t) \\ z = t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\vec{r}(t) = (\cos(t)\,, \mathrm{sen}(t)\,, t)$$

$$\vec{r}\,'(t) = (-\,\mathrm{sen}(t)\,, \cos(t)\,, 1)$$




$$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{2}$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}dt = 2\sqrt{2}\pi$$

# INTEGRAL CURVILÍNEA DE CAMPOS ESCALARES

**Definición:** Sea $f(x, y, z)$ un campo escalar, continuo y acotado, definido en un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$. Sea $C$ un arco de una curva $\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$, $a \leq t \leq b$, regular a trozos y simple (*"camino de integración"*). Se define la integral curvilínea de $f(x, y, z)$ a lo largo de la curva $C$ como:

$$\underbrace{\int_C f(x, y, z)ds}_{\text{Integral curvilínea}} = \underbrace{\int_a^b \underbrace{f\big(\vec{r}(t)\big)\,\|\vec{r}\,'(t)\|}_{g(t)}\,dt}_{\text{es una integral real}}$$

## PROPIEDADES

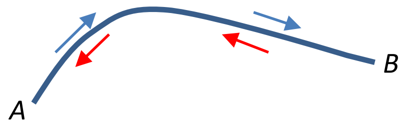
### a) Linealidad

$$\int_C \big(c_1 f_1(x, y, z) + c_2 f_2(x, y, z)\big)ds = c_1 \int_C f_1(x, y, z)ds + c_2 \int_C f_2(x, y, z)ds$$

### b) Cambio de sentido de integración

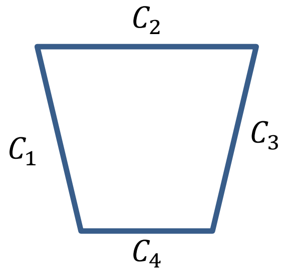
Si se cambia el sentido de recorrido de la curva el resultado de la integral cambia de signo

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y, z)ds = -\int_{\widehat{BA}} f(x, y, z)ds$$




### c) Aditividad respecto al *Camino de Integración*

Sea $C$ una curva regular a trozos $C = C_1 \cup C_2 \cup \ldots C_n$ tal que $C_i \cap C_{i+1}$ es un punto.




$$\int_C f(x, y, z)ds = \int_{C_1} f(x, y, z)ds + \int_{C_2} f(x, y, z)ds + \cdots + \int_{C_n} f(x, y, z)ds$$

### d) Independencia de la representación paramétrica

Si $\vec{r}_1(t)$ y $\vec{r}_2(t)$ son dos representaciones paramétricas regulares que definen la misma curva $C$, entonces la integral curvilínea es independiente de la representación paramétrica salvo el signo que varía de acuerdo al sentido en que se parametrizó la curva.

## APLICACIONES

Considere que se trabaja con hilos, alambres, cables, cordeles, etc., cuyo espesor es despreciable.

### a) Longitud de arco

Si $f(x,y,z)=1$ la integral curvilínea da la longitud de la curva parametrizada. Esto es:

$$L=\int_C ds$$

### b) Aplicaciones Físicas

Si $f(x,y,z)=\delta(x,y,z)$ es la densidad del hilo, alambre, etc, entonces

#### i) Masa del hilo

$$M=\int_C dM=\int_C \delta(x,y,z)ds$$

#### ii) Centro de Masa

$$x_G=\frac{1}{M}\int_C \delta(x,y,z)xds \qquad y_G=\frac{1}{M}\int_C \delta(x,y,z)yds \qquad z_G=\frac{1}{M}\int_C \delta(x,y,z)zds$$

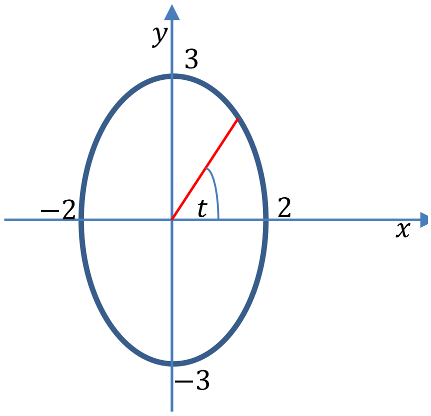
#### ii) Momento de Inercia

$$I_{\text{eje}}=\int_C \delta(x,y,z)d_{\text{eje}}^2(x,y,z)ds$$

**Ejemplo 6**

Hallar el momento de inercia respecto al origen de coordenadas de un alambre de densidad $\delta(x,y)=\sqrt{4+\frac{5}{4}x^2}$ que tiene la forma de $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

La curva es una elipse y se usa la parametrización de coordenadas polares generalizadas




Para una elipse en general

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \begin{cases} x = a\cos(t) \\ y = b\,\mathrm{sen}(t) \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\vec{r}(t) = (a\cos(t)\,,b\,\mathrm{sen}(t))$$

$$\vec{r}'(t) = (-a\,\mathrm{sen}(t)\,,b\cos(t))$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2(t) + b^2\cos^2(t)}$$

$a = 2$ y $b = 3$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{4\,\mathrm{sen}^2(t) + 9\cos^2(t)}$$

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{4\,\mathrm{sen}^2(t) + 4\cos^2(t) + 5\cos^2(t)} = \sqrt{4 + 5\cos^2(t)}$$

Si la densidad es $\delta(x,y) = \sqrt{4+\frac{5}{4}x^2}$ reemplazando la parametrización queda

$$\delta(x,y) = \sqrt{4+\frac{5}{4}4\cos^2(t)} = \sqrt{4+5\cos^2(t)}$$

La distancia al origen de coordenadas es

$$d^2 = x^2 + y^2 = 4\cos^2(t) + 9\mathrm{sen}^2(t) = 4 + 5\mathrm{sen}^2(t)$$

$$I_0 = \int_C d^2(x,y)\delta(x,y)ds = \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(4+5\mathrm{sen}^2(t)\right)}_{d^2}\underbrace{\sqrt{4+5\cos^2(t)}}_{\delta(x,y)}\underbrace{\sqrt{4+5\cos^2(t)}}_{\|\vec{r}'(t)\|}$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(4+5\mathrm{sen}^2(t)\right)\left(4+5\cos^2(t)\right)dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(16+20\cos^2(t)+20\,\mathrm{sen}^2(t)+25\,\mathrm{sen}^2(t)\cos^2(t)\right)dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(36+25\,\mathrm{sen}^2(t)\cos^2(t)\right)dt = \boxed{\frac{313}{4}\pi}$$