CALCULO II

Ingeniería Mecánica

Ingeniería Electromecánica

Equipo de Cátedra

Profesor Titular	Dr. Javier Gimenez
Profesor Adjunto	Dr. Emanuel Tello
Jefe de Trabajos Prácticos	Ing. Cristian Bustos

AÑO 2026

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN n

MODELACION MATEMATICA DE SISTEMAS FISICOS

Se supone que un sistema físico bien definido responde a cada excitación con una sola respuesta.

El estudio completo de este sistema se hace en las siguientes etapas:

1) Planteo del problema físico

   Hay que distinguir entre el problema físico real y el problema físico ideal. Normalmente se consideran situaciones ideales, que son modelos aproximados de la realidad. La idealización del modelo es imprescindible para su posterior modelación matemática, pues de otra manera, esta se tornaría imposible o excesivamente laboriosa; pero, por otra parte, el modelo físico ideal será tanto mejor cuanto más se aproxime a la realidad concreta.

2) Modelación matemática

   Modelación matemática del problema físico ideal, especificando bien la expresión matemática de las leyes que rigen el fenómeno y las condiciones que lo individualizan. En este modelo se obtendrá normalmente una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales.

   No se pueden dar normas generales válidas para todos los casos, pero se recomiendan como necesarios estos puntos:

   a. Seleccionar convenientemente la función incógnita y la variable independiente, especificando el intervalo de variación de dicha variable.
   b. Someter a la función incógnita y a la variable a las leyes que rigen el fenómeno que se trata. Normalmente se obtendrá una EDO.
   c. Agregar las condiciones iniciales que delimitan el problema, dando los valores conocidos de la función incógnita y de sus derivadas para un

determinado valor x_0 de la variable, a partir del cual comienza a realizarse el fenómeno.

3) Resolución del sistema obtenido en 2) con procedimiento puramente matemáticos, que pueden ser analíticos o de cálculo numérico aproximado. Si el modelo matemático está bien ajustado al modelo físico, se obtendrá una sola solución.
4) Chequeo y constatación de la solución para el problema real inicial; interpretación y apreciación de errores, corrección adecuada de los mismos, tabulación de valores, etc.

SISTEMA MASA - RESORTE

Consideremos un resorte suspendido verticalmente de un soporte fijo. Del mismo prende una masa m que estira al resorte una cierta longitud s correspondiente a la posición de equilibrio. De acuerdo con la ley de Hook la fuerza de tensión en el resorte es ks, donde k es la constante de recuperación elástica del resorte. La fuerza debida a la gravedad que tira del resorte hacia abajo es mg, y para efectos de equilibrio se requiere que

$$ks = mg$$

En un medio cuya constante de amortiguamiento es β, se saca al sistema masa-resorte de su posición de equilibrio tirando hacia abajo una cierta distancia x_0 y luego se aplica al sistema la fuerza vertical $f(t)$, donde t es el tiempo a partir del cual el sistema se pone en movimiento. Se desea conocer la posición del sistema en cualquier instante t.

Sea $x(t)$, con la dirección positiva hacia abajo, el desplazamiento del objeto a partir de la posición de equilibrio en cualquier instante t después de iniciado el movimiento. Entonces las fuerzas que actúan sobre el objeto son (Figura 1).

$\vec{F_s} = k(s + x)$ fuerza ejercida por el resorte (se opone al movimiento)

$w = mg$ fuerza peso de la masa suspendida

$\vec{F_r} = \beta\dot{x}$ fuerza de fricción que actúa sobre la masa (resistencia del aire)

$\vec{F}_e = f(t)$ cualquier otra fuerza externa

La resultante de estas fuerzas es

$$\vec{F}_T = w - \vec{F}_s - \vec{F}_r + \vec{F}_e$$

Por la segunda ley de Newton $\vec{F}_T = ma$, luego

$$ma = w - \vec{F}_s - \vec{F}_r + \vec{F}_e$$

$$m\ddot{x} = \underbrace{mg - ks}_{0} - kx - \beta\dot{x} + f(t)$$

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = f(t)$$

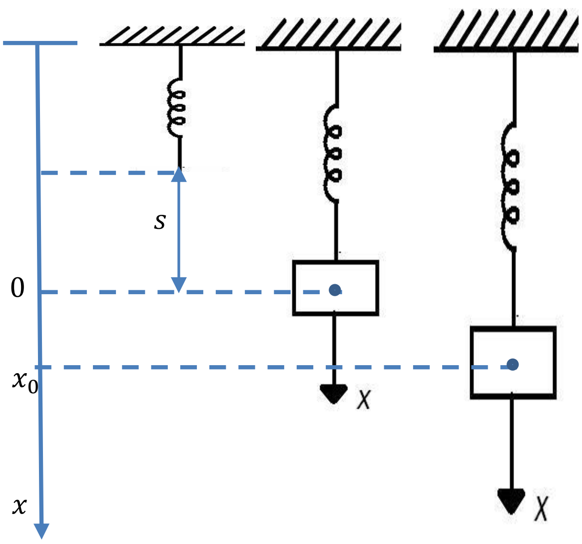

Figura 1

Finalmente, el modelo matemático puede expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = f(t) \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

Ecuación Diferencial de Segundo Orden con Coeficientes Constantes

SISTEMA CIRCUITO ELECTRICO

Sea un circuito eléctrico completo como lo muestra la Figura 2.

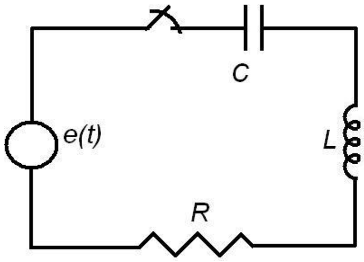

Figura 2

La figura muestra un resistor lineal de resistencia R ohms, capacitor de capacitancia C farads, inductor de inductancia L henrys y fuente de voltaje $e(t)$ volts.

En el instante $t = 0$ se cierra el circuito, suponiendo que la carga y la intensidad de corriente son nulas.

El comportamiento de los circuitos eléctricos está regido por las leyes de Kirchhoff. En Física se habla de caída de voltaje a través de un elemento.

En el esquema presentado, al cerrar la llave circulará una corriente instantánea. Entonces si q es la carga instantánea del capacitor C, y además, la intensidad de corriente es la variación de la carga en el tiempo ($i = \frac{dq}{dt}$), entonces siguiendo las leyes de Kirchoff se tiene:

Caída de voltaje en R es $\quad Ri = R\frac{dq}{dt}$

Caída de voltaje en C es $\quad \frac{q}{C}$

Caída de voltaje en L es $\quad L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}$

$$e(t) = \sum \text{caidas de voltaje}$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = e(t)$$

donde L, R y C son constantes. Luego el modelo completo del circuito eléctrico planteado es

$$\begin{cases} L\dfrac{d^2q}{dt^2}+R\dfrac{dq}{dt}+\dfrac{1}{C}q=e(t) \\ q(0)=0 \\ i(0)=0 \end{cases}$$

Si comparamos ambos sistemas (mecánico y eléctrico), observamos analogías:

La carga	q	corresponde a la posición	x
La inducción	L	corresponde a la masa	m
La resistencia	R	corresponde a la constante de amortiguamiento	β
La inversa de C	$\frac{1}{C}$	corresponde con la constante del resorte	k
La fuerza electromotriz	$e(t)$	corresponde a la fuerza externa aplicada	$f(t)$

Ambos modelos responden a una Ecuación Diferencial Lineal de orden 2 y serán estudiados con particular detalle.

Ecuación Diferencial Lineal de Orden n

Definición

Una E.D.O. se dice Lineal de orden n si puede escribirse de la siguiente forma

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=F(x)$$

donde los coeficientes $a_i(x)$ y $F(x)$ son funciones de la variable independiente.

Si se observa la expresión de la E.D. se puede comparar con la estructura de un polinomio, donde los exponentes indican orden de derivación. Además, la función y desconocida y sus derivadas son lineales, es decir la potencia es uno. De allí el nombre de E.D. Lineal de orden n, donde n es el orden de mayor derivación que aparece en la ecuación diferencial.

Los modelos físicos presentados anteriormente, tanto el modelo del resorte como del circuito eléctrico, responden a este tipo de ecuación, o sea, E.D. Lineal de orden $n = 2$. Además, tienen la particularidad de que sus coeficientes son constantes, luego el modelo matemático que corresponde a estos modelos físicos es de una E.D. Ordinaria Lineal de segundo orden con Coeficientes Constantes.

En general, la E. D. Lineal de orden n puede expresarse en términos de un operador derivada dado por

$$\frac{dy}{dx} = Dy \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = D^2y \quad \dots \quad \frac{d^ny}{dx^n} = D^ny$$

donde el operador D indica derivación y el exponente orden de derivación.

Luego la E.D. Lineal de orden n puede expresarse en función del operador derivada como

$$a_n(x)D^ny + a_{n-1}(x)D^{n-1}y + \cdots + a_0(x)y = F(x)$$

$$\underbrace{\left(a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_0(x)\right)}_{L(D)} y = F(x)$$

Por lo que la E. D. Lineal de se puede expresar en forma compacta como el operador

$$L(D)y = F(x)$$

donde $L(D)$ es un operador dado por

$$L(D) = a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_0(x)$$

Estudiaremos en este curso las Ecuaciones Diferenciales Lineales de orden n con coeficientes constantes. Para este caso, el operador será de la forma

$$L(D) = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_0 \qquad a_i = \text{ctes.}$$

Recuerden las propiedades lineales de la Derivación, esto es:

- la derivada de la suma de funciones es la suma de las derivadas
- la derivada de una constante por una función es la constante por la derivada de la función.

Estas propiedades expresadas en términos del operador derivada son

$$D(u(x)+v(x)) = Du(x) + Dv(x)$$

$$D\big(k\,u(x)\big) = k\,D(u(x))$$

Entonces el operador $L(D)$ es un operador Lineal

La pregunta más importante es: ¿cómo hallar la solución de una E .D. Lineal de orden n? Para ello recurrimos a la ecuación diferencial homogénea asociada

ECUACIÓN DIFERENCIAL HOMOGÉNEA ASOCIADA

Toda Ecuación Diferencial Lineal de orden n con segundo miembro no nulo, tiene asociada una ecuación diferencial lineal de orden n con segundo miembro nulo, llamada Ecuación Diferencial Homogénea asociada. Esto es:

$$L(D)y(x) = F(x) \qquad \text{E. D. L. completa} \quad (I)$$

$$L(D)y(x) = 0 \qquad \text{E. D. L. Homogénea Asociada}$$

Teorema Fundamental I

Si $y = u(x)$ es una solución de (I), e $y = v(x)$ es solución de la Homogénea asociada entonces

$$y(x) = u(x) + v(x)$$

es solución de la completa (I)

Demostración

$Si\ u(x)$ es solución de la completa se cumple $\quad L(D)u(x) = F(x)$

Si $v(x)$ es solución de la Homogéna se cumple $\quad L(D)v(x) = 0$

$$L(D)(u(x)+v(x)) = \underbrace{L(D)u(x)}_{F(x)} + \underbrace{L(D)v(x)}_{0} = F(x)$$

Esto prueba que $\quad y(x) = u(x) + v(x) \quad$ es solución de la E. D. L. de orden n completa

Para que una solución $y(x)$ sea la Solución General de una E. D. L. de orden n debe tener n constantes arbitrarias.

Luego si $u(x)$ es solución particular de la completa (I), no contiene constantes arbitrarias. Para que $y(x)$ sea Solución General debe tener n constantes arbitrarias, las cuales deberán estar en $v(x)$. Esto da lugar al segundo teorema fundamental.

Teorema Fundamental II

La Solución General de $L(D)y = F(x)$ se obtienen como la suma de una solución particular de la completa $(F(x) \neq 0)$ denominada y_P y la Solución General de Homogénea asociada $(L(D)y = 0)$ denominada y_H. Esto es:

$$y_G = y_H + y_P$$

El problema ahora es como hallar la solución general de la homogénea.

ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL HOMOGÉNEA DE ORDEN n

Primero se realizará el estudio para una E.D.L. Homogénea de orden 2 y luego se generaliza para una ecuación diferencial de orden n.

Sea

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Expresada en función del operador será

$$(a_2 D^2 + a_1 D + a_0)y = 0$$

Euler propuso como solución la función

$$y = e^{rx}$$

Luego

$$Dy = re^{rx} \qquad\qquad D^2 y = r^2 e^{rx}$$

Para ser solución debe verificar la ecuación diferencial, por lo tanto

$$a_2r^2e^{rx} + a_1re^{rx} + a_0e^{rx} = 0$$

$$e^{rx}\,\underbrace{(a_2r^2 + a_1r + a_0)}_{=0} = 0$$

Como la función exponencial es siempre positiva para cualquier valor de x, el producto será cero solo si el paréntesis es cero, esto es si

$$a_2r^2 + a_1r + a_0 = 0$$

Esta ecuación se denomina *Ecuación Característica asociada a la E.D. Homogénea*

Observación:

La Ecuación Característica tiene la misma forma que el operador polinómico $L(D)$ con la diferencia que es una Ecuación Algebraica, donde los órdenes de derivación en el operador se corresponden con potencias en la ecuación algebraica.

Por ser una ecuación algebraica de segundo grado, tiene dos raíces r_1 y r_2. Luego, por el supuesto de Euler, cada una de ellas genera una solución diferente, o sea:

$$y_1 = e^{r_1x} \qquad \text{es solución de } L(D)y = 0$$

$$y_2 = e^{r_2x} \qquad \text{es solución de } L(D)y = 0$$

Luego por la linealidad del operador derivada, también será solución

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$$

Teorema

Sean $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ funciones solución de $L(D)y = 0$ (E. D. L. H) y además son **Linealmente Independientes** entre sí, entonces una combinación lineal de ellas

$$y_H = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x)$$

es solución de la Ecuación Diferencial Lineal Homogénea. Además, si el orden de la E.D.L.H. coincide con el número de constantes arbitrarias entonces y_H es la Solución General de $L(D)y = 0$.

Las raíces de una ecuación de segundo grado pueden ser

1. reales y distintas
2. reales y coincidentes
3. complejas conjugadas

Se analizará cada uno de estos casos con ejemplos para luego generalizarlos.

1. Raíces reales y distintas

Ejemplo 1: Sea la ecuación diferencial

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

La ecuación característica asociada es

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

Cuyas raíces son

$$r_1 = 3 \qquad r_2 = 2 \qquad (\text{raíces reales y distintas })$$

Por lo dicho en el teorema anterior la solución general será

$$y_H = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$$

2. Raíces reales y coincidentes

Ejemplo 2: Sea la ecuación diferencial

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

Su ecuación característica asociada será

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

$$(r + 2)^2 = 0$$

Luego para cada raíz hay una solución esto es

$$y_1 = e^{-2x} \qquad \qquad y_2 = e^{-2x}$$

$$y_H = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x}$$

$$y_H = \Big(\underbrace{C_1 + C_2}_{C}\Big) e^{-2x}$$

No es solución general por tener una sola constante.

Para que sea solución general y_1 e y_2 deben ser linealmente independientes, y en este caso no lo son porque son iguales. Luego cada una de ellas puede ponerse como combinación lineal de la otra.

Para independizarlas se multiplica a la segunda función por potencias de la variable independiente hasta que resulten Linealmente Independiente. Esto es

$$x^p y_2$$

Siempre se busca el menor valor de p que hace que sean linealmente independientes, en este caso es suficiente con $p = 1$, esto es:

$$y_1 = e^{-2x} \qquad\qquad y_2 = xe^{-2x}$$

Luego la solución General de la Homogénea será

$$y_H = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$$

Con esta modificación las dos funciones son linealmente independientes y la solución general tiene dos constantes arbitrarias.

3. Raíces complejas conjugadas

Ejemplo 3.1: Sea la ecuación diferencial:

$$y'' + 4y = 0$$

La Ecuación Característica asociada será

$$r^2 + 4 = 0 \qquad \Longrightarrow \quad r_{1,2} = \pm 2j$$

En este caso la forma de la solución (sin demostración) es:

$$y_H = C_1 \cos(2x) + C_2 \operatorname{sen}(2x)$$

Ejemplo 3.2 Sea la ecuación diferencial

$$y'' + 6y' + 13y = 0$$

La ecuación Característica asociada es

$$r^2 + 6r + 13 = 0$$

Cuyas raíces son $\quad r_1 = -3 + 2j \qquad r_2 = -3 - 2j$

En este caso la solución tiene la forma (sin demostración)

$$y_H = e^{-3x}\,(C_1 \cos(2x) + C_2 \operatorname{sen}(2x))$$

Resumen:

- Raíces reales y distintas ($r_1 \neq r_2$):

$$y_H = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

- Raíces reales y coincidentes ($r_1 = r_2$):

$$y_H = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_2 x}$$

- Raíces complejas conjugadas ($r_{1,2} = \alpha \pm \beta j$):

$$y_H = e^{\alpha x}(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \operatorname{sen}(\beta x))$$

Para el caso de Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de Coeficientes Constantes de orden mayor a dos, se procede de la misma manera combinando los casos si es necesario

Ejemplo 4: Hallar la solución de las siguientes Ecuaciones Diferenciales

- $(D^4 - 2D^3 + D^2)y = 0$

  Para resolverla lo primero que debemos hacer es escribir la Ecuación Característica asociada y hallar las raíces, para luego escribir la solución correspondiente.

  La E.D. es de orden 4, por lo que su ecuación característica será de cuarto grado, y por ende tendrá 4 raíces

$$r^4 - 2r^3 + r^2 = 0$$

  Para hallar la solución se puede factorizar:

$$r^2(r^2 - 2r + 1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} r_{1,2} = 0 \\ (r-1)^2 = 0 \quad \Longrightarrow r_{3,4} = 1 \end{array}$$

  Luego se tiene dos raíces dobles distintas, por lo que las cuatro soluciones linealmente independientes de la ecuación son

$$y_1 = e^{0x} = 1 \qquad y_2 = xe^{0x} = x \qquad y_3 = e^x \qquad y_4 = xe^x$$

Note que en dos de las soluciones aparece el factor x con el fin de lograr soluciones linealmente independientes.

De esta forma, las dos primeras funciones corresponden a la raíz $r = 0$ de orden de multiplicidad 2, y las dos últimas corresponden a la raíz $r = 1$ de orden de multiplicada 2.

La solución General será

$$y_H = (C_1 + C_2 x)\underbrace{e^0}_{1} + (C_3 + xC_4)e^x$$

- Resolver

$$4y'' + 9y = 0$$

Es conveniente que la E.D.L.H. esté normalizada, es decir que el coeficiente del término de mayor orden de derivación sea igual a 1. Como la ecuación diferencial está igualada a cero, se divide miembro a miembro por el coeficiente a_0. Note que la E.D. sigue siendo homogénea

$$y'' + \frac{9}{4}y = 0$$

La Ecuación Característica es

$$r^2 + \frac{9}{4} = 0 \qquad r = \sqrt{-\frac{9}{4}} = \pm\frac{3}{2}j$$

Luego sus raíces son $r_{1,2} = \pm\frac{3}{2}j$, es decir $\alpha = 0 \quad y \quad \beta = \frac{3}{2}$ (la unidad imaginaria no se coloca, solamente el coeficiente). Luego la Solución General es

$$y_H = \underbrace{e^{0x}}_{1}\left(C_1 \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$$

$$y_H = C_1 \cos\left(\frac{3}{2}x\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}x\right)$$

Nota:

Hasta ahora solamente hemos estudiado como calcular la solución general de la Homogénea asociada a la E. D. L. de orden n.

Ahora trataremos de obtener la solución particular de la completa, y así obtener la Solución General de la Completa

SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA COMPLETA

En este curso se estudiará el método de coeficientes indeterminados para la obtención de la solución particular

Método de los Coeficientes Indeterminados

Este método se aplica para hallar la solución particular y_p de la E.D.L. de orden n Completa

$$L(D)y = F(x)$$

Este método sólo se puede aplicar cuando $F(x)$ tienen la forma de

a) Polinomio

b) Exponencial de base e

c) Funciones trigonométricas de la forma $\operatorname{sen}(bx)$ ó $\cos(bx)$

d) Combinación de los casos anteriores

Se explicará este método por medio de ejemplos para obtener las reglas generales que lo rigen.

Siempre se debe calcular primero la solución de la homogénea asociada y luego la particular de la completa

a) Caso Polinómico

Ejemplo 1: Resolver

$$y'' - 4y = 2x + 1$$

Cálculo de la Solución General de la Homogénea Asociada

$$y'' - 4y = 0$$

La ecuación Característica asociada es

$$r^2 - 4 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad r_{1,2} = \pm 2$$

$$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

Cálculo de la Solución Particular

Como el segundo miembro $F(x) = 2x + 1$ es un polinomio, es lógico pensar que la función a ensayar como particular sea un polinomio tal que al derivarla y reemplazarla en $L(D) = F(x)$ verifique la identidad. Se propone un polinomio del mismo grado que $F(x)$, esto es

$$y_P = Ax + B$$

Luego se deben calcular las derivadas y reemplazarlas en $L(D) = F(x)$ para hallar los valores de las constantes A y B

$$y_P = Ax + B \quad \Longrightarrow \quad y_p' = A \quad \Longrightarrow \quad y_p'' = 0$$

Reemplazando en la ecuación diferencial se tiene

$$y'' - 4y = 2x + 1$$

$$0 - 4(Ax + B) = 2x + 1$$

$$-4Ax - 4B = 2x + 1$$

Para que sea una identidad debe ser

$$\begin{matrix} -4Ax = 2x \\ -4B = 1 \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = -\dfrac{1}{4} \end{matrix}$$

Luego la solución particular es

$$y_p = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

Cálculo de la Solución de la Completa

La solución General de la completa es

$$y_G = y_H + y_p$$

$$\boldsymbol{y_G = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}}$$

Ejemplo 2: Resolver

$$y''' + 3y'' - 4y' = x^2 - 1$$

Cálculo de la Solución General de la Homogénea Asociada

La ecuación Característica asociada es

$$r^3 + 3r^2 - 4r = 0 \quad \Longrightarrow \quad r(r^2 + 3r - 4) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} r_1 = 0 \\ r_2 = 1 \\ r_3 = 4 \end{array}$$

Luego la solución general de la homogénea es:

$$y_H = C_1 e^{0x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{4x}$$

Cálculo de la Solución Particular

Como el segundo miembro es un polinomio se propone, como en el ejemplo anterior, un polinomio del mismo grado que $F(x) = x^2 - 1$ pero completo

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

Como se supone solución de la E. D. L. completa se procede a derivar la solución particular propuesta para calcular las constantes desconocidas A, B y C

$$y_p = Ax^2 + Bx + C \quad \Longrightarrow \quad y_p' = 2Ax + B \quad \Longrightarrow \quad y_p'' = 2A \quad \Longrightarrow \quad y_p''' = 0$$

Reemplazando en la ecuación diferencial se tiene

$$y''' + 3y'' - 4y' = x^2 - 1$$

$$\begin{array}{rr} & y_p''' = 0 \\ + & 3y_p'' = 6A \\ & -4y_p' = -8Ax - 4B \\ \hline & x^2 - 1 = -8Ax - 4B + 6A \end{array}$$

Se puede observar que la igualdad

$$x^2 - 1 = -8Ax - 4B + 6A$$

no es posible para todo valor de x porque el coeficientes de x^2 del miembro de la izquierda no tiene con quien igualarse en el miembro de la derecha.

El término C de la solución particular propuesta

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$

coincide con uno de los términos de la homogénea

$$y_H = \underbrace{C_1}_{C} + C_2 e^x + C_3 e^{4x}$$

Luego uno de los términos de la solución particular propuesta es linealmente dependiente (coinciden) con uno de los términos de la homogénea. Para evitar este problema se multiplica toda la solución particular por una potencia de la variable independiente que logre la independencia con y_H.

Se propone en este caso como solución particular la siguiente expresión

$$y_p = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

De esta forma ninguno de los término de y_p coincide con los términos de y_H

Para calcular los coeficientes A, B y C se deriva y se reemplaza en la ecuación diferencial completa.

$$\begin{aligned} y_p &= Ax^3 + Bx^2 + Cx \\ y_p' &= 3Ax^2 + 2Bx + C \\ y_p'' &= 6Ax + 2B \\ y_p''' &= 6A \end{aligned}$$

Reemplazando en

$$y''' + 3y'' - 4y' = x^2 - 1$$

Se tiene

$$\begin{array}{rrcrcr} & y_p''' = & & & & 6A \\ + & 3y_p'' = & & 18Ax & & +\,6B \\ & -4y_p' = & -12Ax^2 & -\,8Bx & & -\,4C \\ \hline \end{array}$$

$$x^2 - 1 = -12Ax^2 + (18A - 8B)x + 6A + 6B - 4C$$

Luego igualando los coeficientes se obtiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{cases} 1 = -12A \\ 0 = 18A - 8B \\ -1 = 6A + 6B - 4C \end{cases}$$

Cuya solución es:

$$A = -\frac{1}{12} \qquad B = -\frac{3}{16} \qquad C = -\frac{5}{32}$$

La solución particular es:

$$y_P = -\frac{1}{12}x^3 - \frac{3}{16}x^2 - \frac{5}{32}x$$

Cálculo de la Solución de la Completa

La Solución General de la completa es

$$y_G = y_H + y_p$$

$$\boldsymbol{y_G = C_1 + C_2e^x + C_3e^{4x} - \frac{1}{12}x^3 - \frac{3}{16}x^2 - \frac{5}{32}x}$$

Conclusión

Si el segundo miembro de la E.D.L. de orden n es un polinomio, se ensaya como solución particular otro polinomio completo del mismo grado. En el caso particular que una de las raíces de la Ecuación Característica sea cero aparece en la solución homogénea un término que es constante, luego la particular debe multiplicarse por una potencia de la variable independiente que logre que los términos de la particular no coincidan con alguno de los términos de la homogénea.

---

b) Caso Exponencial

Ejemplo 3: Resolver

$$y'' + 2y' + y = 3e^{2x}$$

Cálculo de la Solución General de la Homogénea Asociada

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Para ello se debe plantear la Ecuación Característica y hallar las raíces

$$r^2 + 2r + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (r+1)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad r_{1,2} = -1$$

Como la raíz es doble, ya se analizó que para independizar las funciones solución la general de la homogénea se plantea:

$$y_H = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

Cálculo de la Solución Particular

Como el segundo miembro $F(x) = 3e^{2x}$ es una función exponencial, es lógico suponer que la solución particular tenga la misma forma, pues al derivarla dos veces sucesivas resulta la misma exponencial con otros coeficientes. Esto permite que, al reemplazarlas en la ecuación diferencial dada, se podrá igualar al segundo miembro. En efecto: supongamos que la solución particular es

$$y_p = Ae^{2x}$$

Si es solución de la E.D. debe verificarla, luego se deben calcular las derivadas primera y segunda, para luego reemplazarlas en la E.D. dada y calcular el coeficiente indeterminado A

$$y_p = Ae^{2x} \quad \Longrightarrow \quad y_p' = 2Ae^{2x} \quad \Longrightarrow \quad y_p'' = 4Ae^{2x}$$

La E.D.L. dada es

$$y'' + 2y' + y = 3e^{2x}$$

Entonces reemplazando la función y sus derivadas se tiene

$$\begin{array}{rrl} & y_p'' &= 4Ae^{2x} \\ + & 2y_p' &= 4Ae^{2x} \\ & y_p &= Ae^{2x} \\ \hline & 3e^{2x} &= 9Ae^{2x} \end{array}$$

Igualando los coeficientes finales queda

$$3 = 9A \quad \Longrightarrow \quad A = \frac{1}{3}$$

Luego la solución particular será

$$y_p = \frac{1}{3}e^{2x}$$

Cálculo de la Solución de la Completa

La solución General de la completa es

$$y_G = y_H + y_p$$

$$\boldsymbol{y_G = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}}$$

Ejemplo 4: Resolver

$$y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$$

Cálculo de la Solución General de la Homogénea Asociada

La E.D. Homogénea asociada es igual que la del ejemplo anterior

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Por lo tanto, la solución será la misma

$$y_H = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

Cálculo de la Solución Particular

Nuevamente el segundo miembro de la E.D.L. de orden n es la función exponencial $F(x) = 2e^{-x}$, esto significa que se debe ensayar como solución particular la función exponencial

$$y_p = Ae^{-x}$$

Repitiendo el mismo proceso anterior para el cálculo de la constante A se tiene

$$y_p = Ae^{-x} \quad \Longrightarrow \quad y_p' = -Ae^{-x} \quad \Longrightarrow \quad y_p'' = Ae^{-x}$$

Se reemplaza en la E.D. $\qquad y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$

y sumando miembro a miembro se tiene

$$\begin{array}{rrl} & y_p'' &= Ae^{-x} \\ + & 2y_p' &= -2Ae^{-x} \\ & y_p &= Ae^{-x} \\ \hline & 2e^{-x} &= 0Ae^{-x} \end{array}$$

Lo cual es un absurdo porque si se simplifica e^{-x} queda $2 = 0$.

Esto significa que la solución particular propuesta es solución de la Homogénea, porque al reemplazarla en la E.D. da igual a cero. Si se observa la Solución General de la Homogénea y_H, en las funciones que son parte de la solución aparece e^{-x}, luego la y_p propuesta es linealmente dependiente de las funciones solución de la Homogénea. Para independizarlas se sigue el mismo criterio que usado para la solución de la homogénea, esto es, se multiplica por una potencia de la variable independiente hasta que resulte Linealmente Independiente. Esto es:

$$y_p = x^p e^{-x}$$

Para $p = 1$ resulta $y_p = Axe^{-x}$ la cual coincide con el segundo término de la solución $y_H = C_1 e^{-x} + C_2 xe^{-x}$.

Para $p = 2$ resulta $y_p = Ax^2 e^{-x}$ la cual es linealmente independiente de los términos de y_H. Por lo que se propone como solución particular

$$y_p = Ax^2 e^{-x}$$

Para calcular el valor de A se procede de la misma manera que antes, esto es, se deriva las veces que indica la E.D. y se reemplaza en dicha ecuación

$$y_p = Ax^2 e^{-x}$$

$$y_p' = 2Axe^{-x} - Ax^2 e^{-x}$$

$$y_p'' = 2Ae^{-x} - 4Axe^{-x} + Ax^2 e^{-x}$$

Reemplazando estas expresiones en la ecuación diferencial y sumando miembro a miembro resulta

$$\begin{array}{rrlcccc} & y_p'' &= 2Ae^{-x} & - & 4Axe^{-x} & + & Ax^2 e^{-x} \\ + & 2y_p' &= & & 4Axe^{-x} & - & 2Ax^2 e^{-x} \\ & y_p &= & & & & Ax^2 e^{-x} \\ \hline & 2e^{-x} &= 2Ae^{-x} & + & 0 & + & 0 \end{array}$$

Luego igualando los coeficientes se tiene $2 = 2A \quad \Longrightarrow \quad A = 1$

La solución particular será

$$y_p = x^2 e^{-x}$$

Cálculo de la Solución de la Completa

La Solución General será

$$y_G = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x^2 e^{-x}$$

Conclusión

Si $F(x)$ es una función exponencial, se ensaya como solución particular la misma función exponencial multiplicada por una constante a determinar. Si la solución propuesta no coincida con alguno de los términos de la solución general de la homogénea (Linealmente dependientes) entonces se multiplica por potencias de la variable independiente hasta que resulte linealmente independiente de la solución y_H. De allí la necesidad de calcular primero la solución y_H y luego y_p. Para calcular la constante se reemplaza la función propuesta y sus derivadas en la ecuación diferencial completa, operando matemáticamente se igualan los coeficientes para obtener el valor de A

---

c) Funciones trigonométricas de la forma $sen(bx)$ ó $\cos(bx)$

Ejemplo 5: Resolver

$$y'' + 2y' + y = 5\cos(2x)$$

Cálculo de la Solución General de la Homogénea Asociada

La E.D. Homogénea asociada es igual que la del ejemplo anterior

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Por lo tanto, la solución será la misma

$$y_H = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

Cálculo de la Solución Particular

Para plantear la solución particular se analiza el segundo miembro de la E. D. L. completa, en este ejemplo $F(x) = \cos(2x)$. De manera que es de suponer que la forma de la solución particular será la misma función trigonométrica multiplicada por una constante a determinar, pero como la función coseno tiene la particularidad que las derivadas dan alternadamente senos y cosenos, será necesario proponer como solución particular la expresión

$$y_p = A\cos(2x) + B\text{sen}(2x)$$

Para calcular las constantes se procede de la misma manera que en los casos anteriores, o sea derivar y reemplazar en la E. D. L. completa

$$y_p = A\cos(2x) + B\text{sen}(2x)$$

$$y_p' = -2A\text{sen}(2x) + 2B\cos(2x)$$

$$y_p'' = -4A\cos(2x) - 4B\text{sen}(2x)$$

Reemplazando en la E.D. $y'' + 2y' + y = 5\cos(2x)$ e igualando los coeficientes queda

$$\begin{array}{rrrr}
 & y_p'' = & -4A\cos(2x) & -\,4B\text{sen}(2x) \\
+ & 2y_p' = & 4B\cos(2x) & -\,4A\text{sen}(2x) \\
 & y_p = & A\cos(2x) & +\,B\text{sen}(2x) \\
\hline
 & 5\cos(2x) = & (-3A+4B)\cos(2x) & +(-3B-4A)\text{sen}(2x)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5 = -3A + 4B \\ 0 = -3B - 4A \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A = {}^{-3}/_{5} \\ B = {}^{4}/_{5} \end{array}$$

La solución particular es

$$y_p = -\frac{3}{5}\cos(2x) + \frac{4}{5}\text{sen}(2x)$$

Cálculo de la Solución de la Completa

La solución general es

$$\boldsymbol{y_G = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} - \frac{3}{5}\cos(2x) + \frac{4}{5}\text{sen}(2x)}$$

Ejemplo 6: Resolver

$$y'' + 9y = 5\cos(3x)$$

Cálculo de la Solución General de la Homogénea Asociada

Para obtener la solución de la Homogénea se debe resolver la ecuación característica

$$r^2 + 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad r_{1,2} = \pm 3j$$

La solución general de la homogénea será:

$$y_p = C_1 \cos(3x) + C_2 \operatorname{sen}(3x)$$

Cálculo de la Solución Particular

Como en el ejemplo anterior la función es $F(x) = 5\cos(3x)$, luego se ensaya una particular de la misma forma

$$y_p = A\cos(3x) + B\operatorname{sen}(3x)$$

Para calcular las constantes se deriva y se reemplaza en la E.D.

$$y_p' = -3A\operatorname{sen}(3x) + 3B\cos(3x)$$

$$y_p'' = -9A\cos(3x) - 9B\operatorname{sen}(3x)$$

Reemplazando en la E.D. completa

$$y'' + 9y = 5\cos(3x)$$

$$\begin{array}{rrl} & y_p'' = & -9A\cos(3x) - 9B\operatorname{sen}(3x) \\ + & 9\,y_p = & 9A\cos(3x) + 9\,B\operatorname{sen}(3x) \\ \hline & 5\cos(3x) = & 0\,A\cos(3x) + 0B\operatorname{sen}(3x) \end{array}$$

Lo cual es un absurdo porque no hay coeficientes A y B que verifiquen la igualdad. Esto se debe a que la solución particular propuesta es igual que la solución general de la Homogénea y_H, y por lo tanto, al reemplazarla en la E.D. da por resultado 0.

Para evitar esta situación se multiplica la solución particular propuesta por una potencia de la variable independiente hasta que resulte Linealmente Independiente de y_H:

$$y_p = x(A\cos(3x) + B\operatorname{sen}(3x))$$

Ahora se procede a derivar

$$y_p' = A\cos(3x) + B\text{sen}(3x) + x(-3A\text{sen}(3x) + 3B\cos(3x))$$

$$y_p'' = -3A\text{sen}(3x) + 3B\cos(3x) - 3A\text{sen}(3x)$$

$$+3B\cos(3x) + x\big(-9A\cos(3x) - 9B\text{sen}(3x)\big)$$

Operando y reemplazando en la E.D. $y'' + 9y = \cos(3x)$ queda

$$5\cos(3x) = y'' + 9y = -\underbrace{6A}_{0}\text{sen}(3x) + \underbrace{6B}_{5}\cos(3x)$$

Igualando coeficientes, se obtiene

$$\begin{matrix} 5 = & 6B \\ 0 = & -6A \end{matrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{matrix} B = \dfrac{5}{6} \\ A = 0 \end{matrix}$$

La solución particular es:

$$y_p = \frac{5}{6}x\,\text{sen}(3x)$$

Cálculo de la Solución de la Completa

La solución general es

$$\boldsymbol{y_G = C_1\cos(3x) + C_2\text{sen}(3x) + \frac{5}{6}x\,\text{sen}(3x)}$$

Conclusión:

Si $F(x)$ es la función $\text{sen}(bx)$, $\cos(bx)$, o una combinación lineal de ambas, se ensaya como solución particular siempre una suma de seno y coseno con la misma frecuencia que la función dada en el segundo miembro. Antes de calcular los coeficientes, se debe mirar la solución general de la Homogénea asociada y_H. En el caso que uno de los términos de y_H sea un seno ó coseno con la misma frecuencia que la que aparece en $F(x)$ se deberá multiplicarse por una potencia de la variable independiente hasta que resulte linealmente independiente de los términos de la homogénea.

d) Combinación de los casos anteriores

Ejemplo 7 Resolver

$$y'' + 4y' + 3y = x + 2e^{-x}$$

Cálculo de la Solución General de la Homogénea Asociada

Lo primero que se debe hacer es calcular la solución de la E.D.L. Homogénea asociada

$$y'' + 4y' + 3y = 0$$

Para ello se plantea y resuelve la Ecuación Característica correspondiente

$$r^2 + 4r + 3 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad r_1 = -1 \quad ; \quad r_2 = -3$$

La solución general de la Homogénea será

$$y_H = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$$

Cálculo de la Solución Particular

Como el segundo miembro de la ecuación dada $F(x) = x + 2e^{-x}$ es una suma de un polinomio con una función exponencial, se ensaya como particular la suma de un polinomio completo del mismo grado que el dado más una exponencial igual a la del segundo miembro.

$$y_p = Ax + B + Ce^{-x}$$

Si se observa la función planteada como particular, el tercer término Ce^{-x} coincide con uno de los términos de y_H. Luego son linealmente dependientes y para independizarlos se multiplica solamente ese término por una potencia de x hasta que resulten Linealmente Independientes.

$$y_p = Ax + B + Cxe^{-x}$$

Ahora se procede como siempre derivando y reemplazando en la E. D. L. completa para calcular los coeficientes A, B y C

$$y_p = Ax + B + Cxe^{-x}$$

$$y_p' = A + Ce^{-x} - Cxe^{-x}$$

$$y_p'' = -Ce^{-x} - Ce^{-x} + Cxe^{-x} = -2Ce^{-x} + Cxe^{-x}$$

Reemplazando en la E.D.

$$y'' + 4y' + 3y = x + 2e^{-x}$$

$$\begin{array}{rrrrr}
y_p'' = & & & -2Ce^{-x} & +Cxe^{-x} \\
4y_p' = & & 4A\ + & 4Ce^{-x} & -4Cxe^{-x} \\
3y_p = & 3Ax + & 3B + & & 3Cxe^{-x} \\
\hline
x + 2e^{-x} = & 3Ax + & 4A + 3B + & 2Ce^{-x} + & 0Cxe^{-x}
\end{array}$$

Igualando coeficiente de los términos homólogos se tiene

$$\begin{array}{c} 1 = 3A \\ 0 = 4A + 3B \\ 2 = 2C \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} A = 1/3 \\ B = -4/9 \\ C = 1 \end{array}$$

Luego la solución particular es

$$y_p = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9} + xe^{-x}$$

Cálculo de la Solución de la Completa

La solución General de la E. D. L. completa es

$$\boldsymbol{y_G = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9} + xe^{-x}}$$

Para calcular las constantes arbitrarias se deben conocer tantas condiciones como constantes tiene la solución general, y que deben ser igual al orden de la Ecuación Diferencial. De esa manera se obtiene la solución única del problema

Conclusión

En el caso que el segundo miembro sea una combinación de los casos anteriores se procede de la misma manera que para cada uno de los casos explicados anteriormente. Esto es:

- *Si $F(x)$ es suma de un polinomio de grado m ,una función exponencial , y una función trigonométrica ($\text{sen}(bx)$, $\cos(bx)$) se debe ensayar una solución particular como suma de un polinomio completo de grado m más una función exponencial igual a la dada más una función trigonométrica de senos y cosenos que tengan la misma frecuencia que las dadas. También deberá tenerse en cuenta si alguno de esos términos es combinación Lineal de algunos de los términos de la solución de la Homogénea, en cuyo caso se procederá a tratarse dicho caso particular como se ha visto anteriormente*

SOLUCIÓN UNICA DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL LINEAL DE ORDEN n

Dada una E. D. L. $L(D)y = F(x)$ de orden n, la solución general es la suma de la solución general de la Homogénea asociada más la solución particular

$$y_G = y_H + y_p$$

Se deben dar n condiciones iniciales para obtener la solución única y obtener el valor de las n constantes arbitrarias que figuran en y_H. En este proceso se tendrá que resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas.

Las condiciones iniciales de $L(D)y = F(x)$ de orden n son el valor de la función y sus $n-1$ primeras derivadas en un valor de la variable independiente x_0, o sea:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ y''(x_0) = y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \quad n - condiciones$$

Estas condiciones me permiten encontrar los valores de las constantes arbitrarias.

Ejemplo 8 Resolver el siguiente ejercicio

$$\begin{cases} y'' + 9y = 5\cos(3x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Este ejercicio coincide con el dado en el ejemplo 6, luego su solución será

$$y_G = C_1\cos(3x) + C_2\text{sen}(3x) + \frac{5}{6}x\,\text{sen}(3x)$$

Para las condiciones iniciales se debe derivar la función y luego evaluarla en $x = 0$.

$$y'_G = -3C_1 \operatorname{sen}(3x) + 3C_2 \cos(3x) + \frac{5}{6}\operatorname{sen}(3x) + \frac{5}{2}x\cos(3x)$$

Luego:

$$\begin{cases} y_G = C_1 \cos(3x) + C_2 \operatorname{sen}(3x) + x\dfrac{1}{6}\operatorname{sen}(3x) \\ y'_G = -3C_1 \operatorname{sen}(3x) + 3C_2 \cos(3x) + \dfrac{5}{6}\operatorname{sen}(3x) + \dfrac{5}{2}x\cos(3x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_G(0) = C_1 = 0 \\ y'_G(0) = -3C_1.0 + 3C_2 + \dfrac{5}{6}.0 + 0 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(3x) + \frac{5}{6}x\operatorname{sen}(3x)$$

$$\boldsymbol{y = \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{6}x\right)\operatorname{sen}(3x)}$$