CALCULO II

Ingeniería Mecánica
Ingeniería Electromecánica

Equipo de Cátedra

Profesor Titular	Dr. Javier Gimenez
Profesor Adjunto	Dr. Emanuel Tello
Jefe de Trabajos Prácticos	Ing. Cristian Bustos

AÑO 2026

CAMPOS ESCALARES

INTRODUCCIÓN

En Cálculo I se estudiaron funciones de una variable mediante las cuales se establecía una correspondencia que asigna a cada elemento $x \in D \subseteq \mathbb{R}$ uno y sólo un número real y. Para ello se usó la notación $y = f(x)$. El dominio de la función f era el conjunto D y la imagen era el conjunto que contiene a todos los posibles resultados

$$I = \{f(x) \in \mathbb{R} / \ x \in D \ \}$$

En la asignatura Cálculo II extendemos el concepto de funciones o campos considerando que tanto el dominio como la imagen pueden contener más de una variable.

Se trata de describir mediante funciones de varias variables algunas conceptos, procesos o fenómenos naturales, sobre todo físicos.

Ejemplos:

- Dada la cúpula de un edificio. A cada punto de la base, de coordenadas (x, y) le corresponde una altura $Z(x, y)$ sobre el techo.
- Dada una lámina plana metálica y delgada. Mediante un dispositivo adecuado, logramos que cada punto (x, y) de la lámina alcance una temperatura $U(x, y)$.
- A cada punto (x, y, z) de un sólido se le asigna una densidad $\delta(x, y, z)$.
- La trayectoria que sigue un objeto al ser lanzado es una función a cada tiempo t se le asigna una posición $\vec{P}(t)$
- En cada punto (x, y, z) del interior de un tubo, un fluido sigue un vector velocidad $\vec{v}(x, y, z)$.
- Pensemos en el espacio que rodea a la superficie terrestre. En cada punto de ese espacio, de coordenadas (x, y, z), una masa de prueba está sometida a una fuerza $\vec{F}(x, y, z)$ debida a la ley de gravitación.

En todos estos ejemplos tenemos variables independientes que pertenecen a un conjunto de partida (entrada), y variables dependientes cuyos posibles valores conforman un conjunto de llegada (salida).

En los tres primeros ejemplos el conjunto de llegada tiene dimensión 1, esto es, los correspondientes campos tienen salidas escalares. Estos campos se denominan Campos Escalares y asignan a cada punto de $D \subseteq \mathbb{R}^n$ (que representa por ejemplo una posición) un único valor escalar real (que representa una altura, temperatura o densidad, entre otras) en el correspondiente punto.

DEFINICIÓN DE CAMPO ESCALAR:

Es todo mapeo que a cada elemento de un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ le asigna un único valor real. A esta asignación se la denota con $f: D \to \mathbb{R}$

Por otro lado, los últimos tres ejemplos tienen la particularidad de que el conjunto de llegada tiene dimensión mayor a 1, esto es, tienen salidas vectoriales (que representan por ejemplo posiciones, velocidades, fuerzas, etc.). Estas funciones se denominan Campos Vectoriales y serán estudiados con mayor detalle en el próximo Capítulo. En este Capítulo nos centraremos en estudiar Campos Escalares, optando muchas veces por ejemplificar usando $n = 2$ o $n = 3$ por simplicidad pero sin pérdida de generalidad.

En los campos escalares, las variables independientes se agrupan en un vector $\vec{P} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y la variable dependiente es un escalar real $u = f(\vec{P}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Casos particulares

- para $n = 2$ se tiene $\vec{P} = (x, y)$ $z = f(\vec{P}) = f(x, y)$
- para $n = 3$ se tiene $\vec{P} = (x, y, z)$ $u = f(\vec{P}) = f(x, y, z)$

DOMINIO: El dominio de un Campo Escalar $f: D \to \mathbb{R}$ es el conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$. En otras palabras, es el conjunto de todos los posibles valores para la variable independiente para los cuales existe un correspondiente en el conjunto de salida.

IMAGEN: La imagen de un Campo Escalar $f: D \to \mathbb{R}$ es el conjunto

$$I = \{f(\vec{P}) : \vec{P} \in D\} \subseteq \mathbb{R}$$

En otras palabras, es el conjunto de todos los resultados que se obtienen al evaluar la función en todos los puntos del dominio.

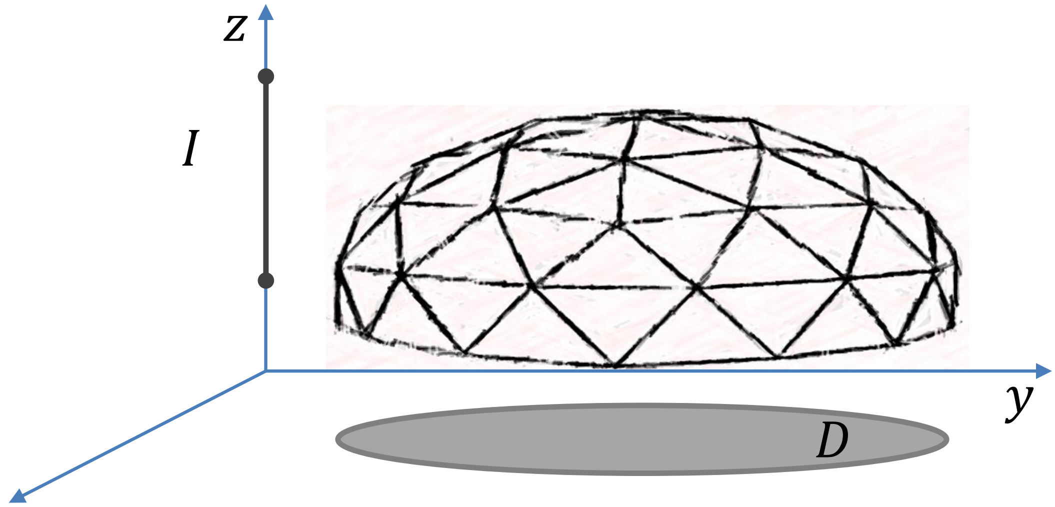


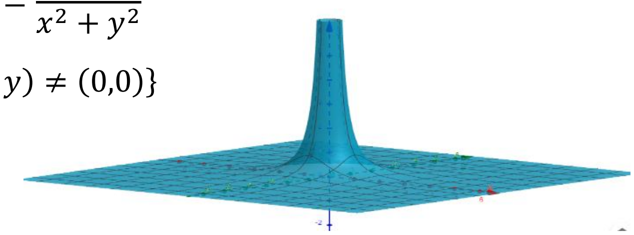
Figura 1

Ejemplo: Determinar los conjuntos Dominio e Imagen de la función

$$z = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

Dominio $\quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x, y) \neq (0,0)\}$

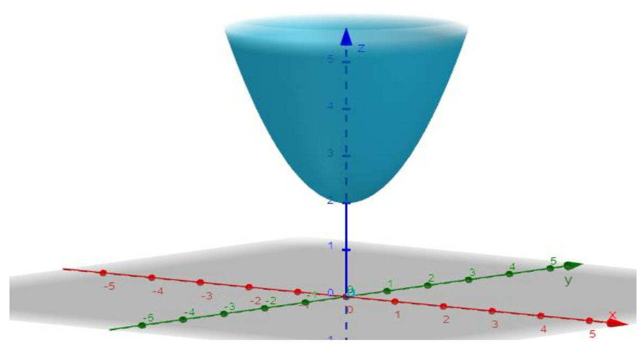
Imagen $\quad I = (0, \infty) = \mathbb{R}^+$



Ejemplo: Ídem para la función $z = x^2 + y^2 + 2$

Dominio $\quad D = \mathbb{R}^2$

Imagen $\quad I = [2, \infty)$



GRÁFICA DE UN CAMPO ESCALAR

La representación gráfica de las funciones $z = f(x\,,y)$ está en $\mathbb{R}^3$, pues a cada punto del plano (x, y) le corresponde un número real z, que estará ubicado en un tercer eje perpendicular al plano donde se encuentra el dominio. De este modo, a cada punto $(x, y) \in D$ se le asigna una altura z con la que se conforma una terna (x, y, z). El conjunto de todas las ternas conforma la gráfica de la función. Esta gráfica geométricamente es una superficie S contenida en $\mathbb{R}^3$ cuya proyección sobre el plano (x, y) es el Dominio de la función f

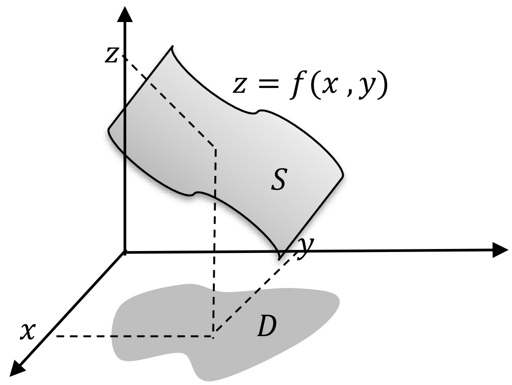


Figura 2

Observación: La imagen $z = f(x\,,y)$ es un número real, luego el conjunto imagen $I \subseteq \mathbb{R}$ mientras que la gráfica es una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$.

Para $n = 3$ tenemos $\vec{P} = (x, y, z) \in D \subseteq \mathbb{R}^3$, $u = f(x, y, z) \in I \subseteq \mathbb{R}$, por lo que su gráfica estará en $\mathbb{R}^4$, la cual no tiene una representación intuitivamente directa. Para n arbitrario, en general, la imposibilidad de representar gráficamente da origen a la necesidad de recurrir a representaciones abstractas no convencionales.

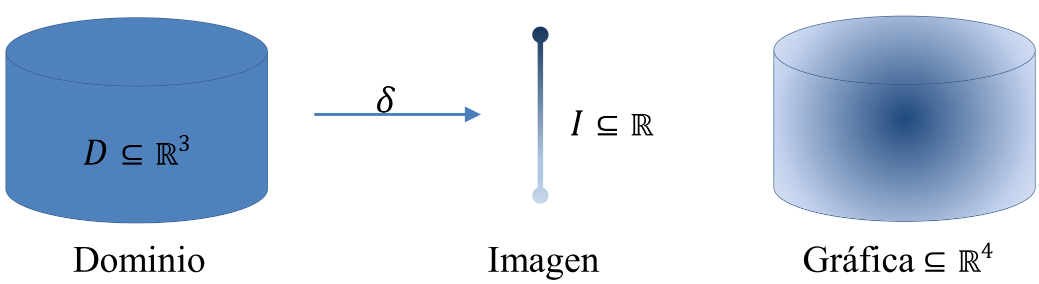


Figura 3

CONJUNTOS DE NIVEL

Definición:

Dado un campo escalar $u = f(\vec{P})$, para cada constante $k \in \mathbb{R}$ se define el conjunto de nivel C_k conformado por todos los puntos del dominio $\vec{P} \in D$ para los cuales $f(\vec{P}) = k$. Esto es

$$C_k = \{\vec{P} \in D / f(\vec{P}) = k\}$$

Para $n = 2$ los conjuntos de nivel son curvas de nivel definidas sobre el plano (Figura 4)

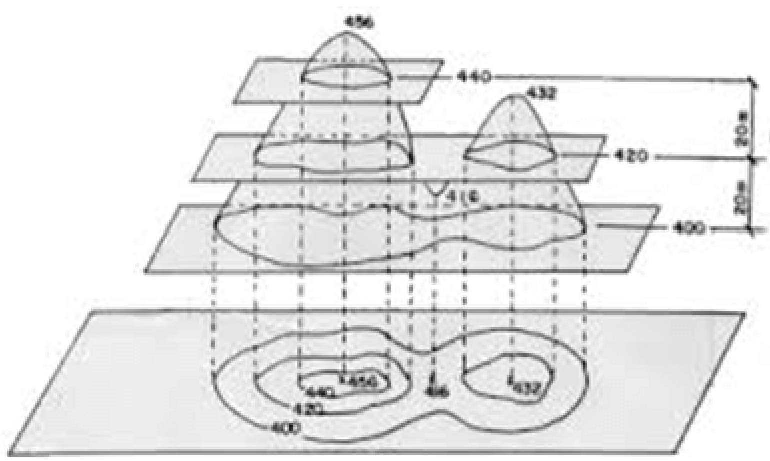


Figura 4

Las curvas de nivel de $z = f(x\,,y)$ están ubicadas en el plano xy (Dominio), y son la proyección de las curvas que se obtienen de la intersección de la superficie $z = f(x\,,y)$ con planos $z = k$ paralelos al plano xy, y su gráfica es la curva $f(x,y) = k$

- **Ejemplo 1**: Sea $z = f(x\,,y) = x^2 + y^2$.
  Hallar los conjuntos de nivel para distintos valores de k
  Solución:
  Para $k = 4$, la curva de nivel es
  $C_4 = \{(x\,,y) \in D / x^2 + y^2 = 4\}$,
  la cual corresponde a una circunferencia de radio 2 dibujada sobre el plano dominio (Figura 5)

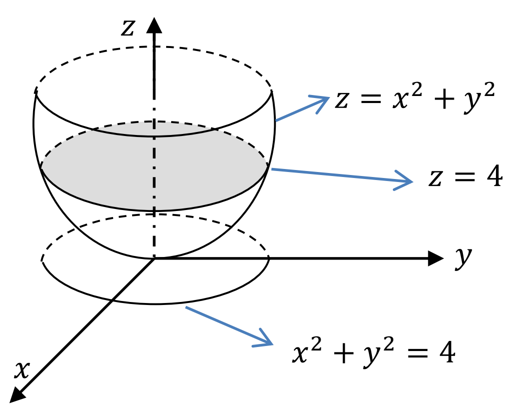


Figura 5

- **Ejemplo 2**: Si $u = f(x\,,y)$ es una distribución de temperatura sobre una lámina, entonces las curvas de nivel se llaman **isotermas**
- **Ejemplo 3**: Si $u = f(x\,,y)$ es una distribución de presión, entonces las curvas de nivel se llaman **isobaras**

  Estos conceptos se utilizan mucho en la confección de mapas en geofísica

Cuando $n = 3$ los conjuntos de nivel son superficies de nivel, y así sucesivamente se generaliza el concepto de conjuntos de nivel.

Ejemplo: Las superficies de nivel de la función $u = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}$ son elipsoides cuando $u = k > 0$, un punto cuando $u = k = 0$, y el conjunto vacío cuando $u = k < 0$.

LIMITE

En el caso de funciones de una variable, es factible hacer un juicio acerca de la existencia del límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 a partir de la gráfica de f. Se estableció que el límite de una función $f(x)$ existe en $x = x_0$ si y sólo si el límite de $f(x)$ cuando nos acercamos a x_0 por derecha y por izquierda existen y son iguales al mismo número L. En tal caso se dice que existe el límite y que es igual a L.

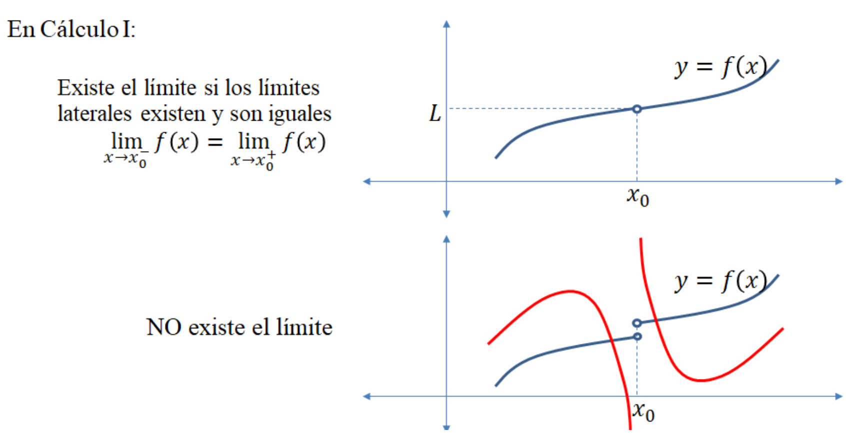


Figura 6

En funciones que dependen de dos variables la situación es diferente debido a que el dominio no es lineal sino que es un subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$, donde el concepto de intervalo se generaliza en círculos o rectángulos, y la forma de acercarnos a un punto en cuestión (x_0, y_0) puede ser en cualquier dirección lineal o curva.

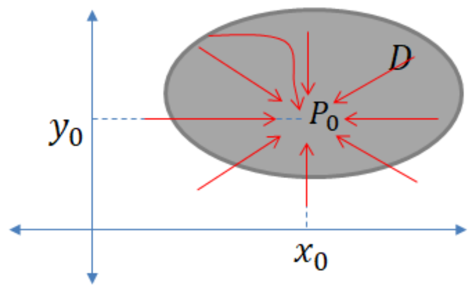


Figura 7

Decimos que el límite de f cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0) es L cuando sin importar la dirección en la que nos acerquemos a (x_0, y_0) considerando puntos (x, y), el valor de $f(x, y)$ tiende siempre a L.

La simbología que usaremos es

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = L$$

Si ρ es la distancia entre P_0 y un punto genérico P, entonces

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

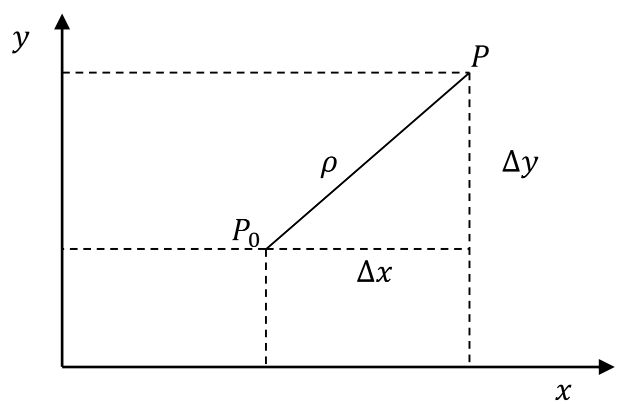


Figura 8

En este contexto, también utilizaremos la notación

$$\lim_{\rho\to 0} f(P) = L$$

Ejemplo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{(\rho\cos\theta)^2 \rho \operatorname{sen}\theta}{(\rho\cos\theta)^2+(\rho\operatorname{sen}\theta)^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3 \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta}{\rho^2}$$
$$= \lim_{\rho\to 0} \rho\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta = 0$$

Ejemplo: Consideremos $P_0 = (0,0)$ y calculemos $\lim_{P\to P_0} f(P)$ siendo

$$z = f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$$

siguiendo todas las direcciones rectas $y = mx$ que pasan por P_0

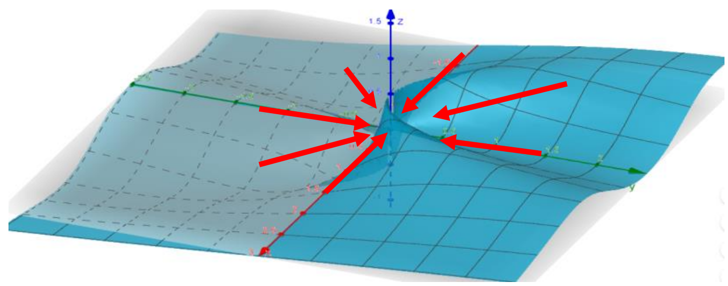


Figura 9

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 mx}{x^4+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{x^2+m^2} = \frac{m0}{0^2+m^2} = 0$$

Ahora realicemos el cálculo siguiendo la dirección parabólica $y = x^2$ (la cual pasan por P_0)

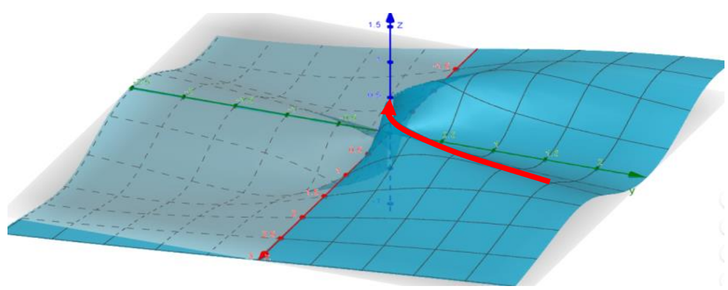


Figura 10

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2x^2}{x^4+(x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Conclusión: No existe el límite en $P_0 = (0,0)$ ya que existe al menos una dirección para la cual es límite da un resultado diferente

LIMITES ITERADOS

No existe una forma única de calcular límites. Se puede usar su definición, usar cambios de coordenadas (como coordenadas polares), o incluso intentar con diversas direcciones. Una alternativa práctica (pero no concluyente) es usar límites iterados. La idea es ver a los límites dobles (o múltiples) como una secuencia de límites simples. Este concepto se basa en que si el límite doble existe, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

Ejemplo:

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} -x^3+y^2 = \lim_{x\to 2}\lim_{y\to 1} -x^3+y^2 = \lim_{x\to 2} -x^3+1^2 = \lim_{x\to 2} -x^3+1 = -7$$

O intercambiando el orden

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} -x^3+y^2 = \lim_{y\to 1}\lim_{x\to 2} -x^3+y^2 = \lim_{y\to 1} -2^3+y^2 = \lim_{y\to 1} -8+y^2 = -7$$

La recíproca no vale en general ya que puede que existan los límites iterados, incluso puede que coincidan, aunque el límite doble no exista tal y como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

Anteriormente vimos que no existe el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$. Sin embargo los dos límites iterados existen y son iguales:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 0}{x^4+0^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0^2 y}{0^4+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

En conclusión, los límites iterados son una herramienta más para indagar sobre la existencia de límites. En este curso solo utilizaremos el concepto de límite para definir el concepto de continuidad y, principalmente de derivada. Para más detalles leer el libro Matemática 3, Cálculo de varias variables de Dennis G. Zill, Sección 4.2: Límite y Continuidad.

CONTINUIDAD

Una función $f(x,y)$ es continua en un punto (x_0,y_0) si, y sólo si,

1) La función está definida en el punto, esto es: existe $f(x_0,y_0)$

2) Existe el límite de la función en el punto, esto es

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

3) $f(x_0,y_0) = L$

En otras palabras, coincide el valor de la función en el punto con el valor del límite.

Ejemplos:

1) Analizar la continuidad de $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy$ en el punto $P_0(1,2)$

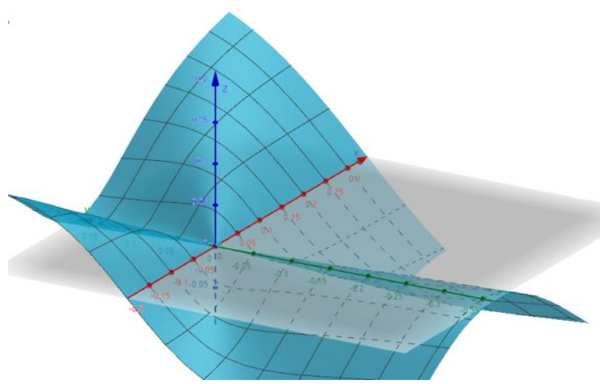
$$f(1,2) = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = 1$$

Luego f es continua en $(1,2)$.

2) La función $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$

es discontinua en $P_0 = (0,0)$ ya que no existe $f(P_0)$.



Sin embargo

$$L = \lim_{P\to P_0} f(P) = \lim_{\rho\to 0} f(P) = \lim_{\rho\to 0} \frac{(\rho\cos\theta)^2 \rho\,\mathrm{sen}\,\theta}{(\rho\cos\theta)^2 + (\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3 \cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{\rho^2}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \rho\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

Para salvar esta discontinuidad se puede recurrir a la definición por partes de la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ahora si la función es continua en $(0,0)$ ya que coinciden el límite y el valor de la función.

DERIVADA DIRECCIONAL

Repaso de una variable:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha \qquad (1)$$

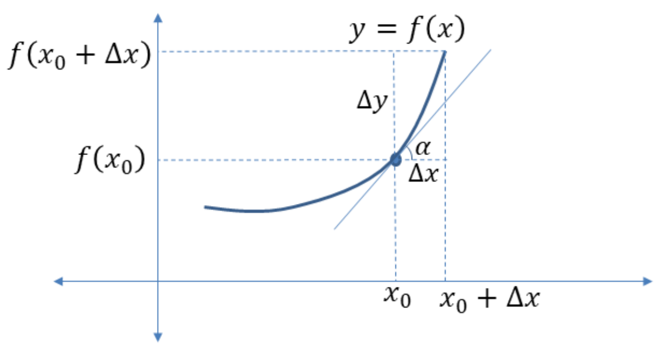


Figura 11

En funciones de una variable, la variable independiente se mueve en una sola dirección sobre el eje x

Analicemos la derivada de campos escalares considerando $n = 2$

En un campo escalar $z = f(x\,,y)$ las variables independientes se mueven en el plano, y podemos acercarnos al punto $P_0(x_0, y_0)$ considerando un vector de dirección $\vec{u} = |\vec{u}|.\breve{u}$ siendo $\breve{u} = (\cos\theta\,, \operatorname{sen}\theta)$ su correspondiente versor.

Consideremos ahora un punto arbitrario $P = P_0 + \rho\breve{u}$ definido sobre la recta que pasa por P_0 y que tiene a $\vec{u}$ como vector director. Extendiendo verticalmente esta recta se conforma un plano (ver plano verde en la Fig. 6) que corta a la superficie $z = f(x,y)$ es una curva que pasa por el punto $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$.

Si observamos solamente el plano verde podemos usar una analogía del concepto de derivada visto en Cálculo I, para definir el concepto de derivada de la función f en la dirección del vector $\vec{u}$.

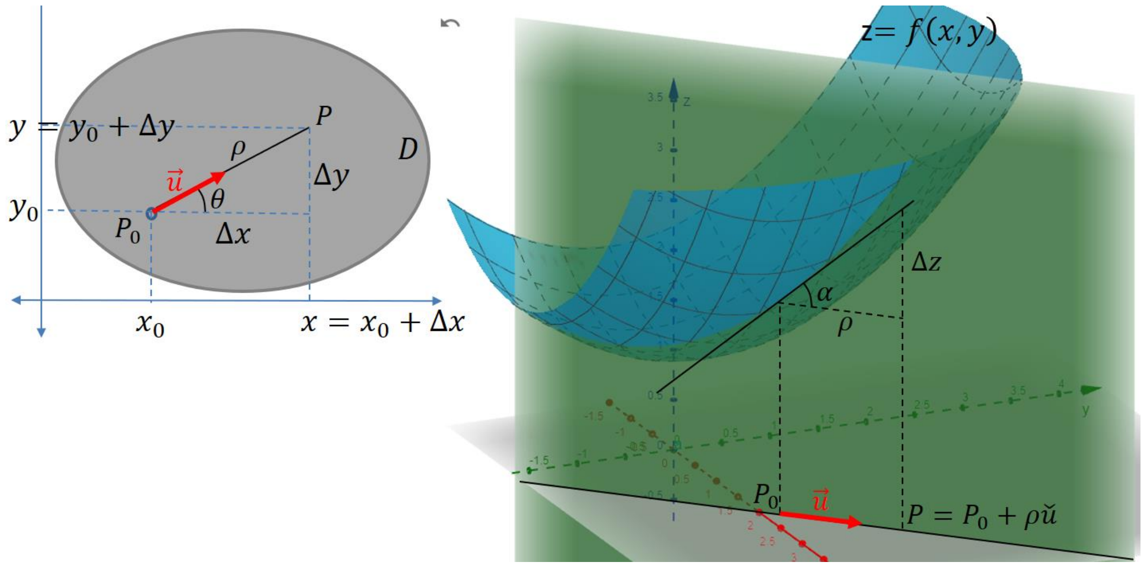


Figura 12

En Cálculo I el punto de interés era x_0; ahora es $P_0 = (x_0, y_0)$.

En Cálculo I el punto incrementado era $x = x_0 + \Delta x$; ahora es

$$P = P_0 + \rho\breve{u} = (x_0 + \rho\cos\theta\,, y_0 + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

En Cálculo I, con el objetivo de acercarnos al punto de interés, esto es $x \to x_0$, hacíamos $\Delta x \to 0$; ahora con el fin de que P esté lo más cerca posible de P_0 siguiendo la dirección $\vec{u}$ hacemos $\delta \to 0$.

En Cálculo I la derivada era la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ sobre x_0; ahora es la pendiente de la recta tangente a la curva que se forma al intersectar la superficie $z = f(x,y)$ con el plano vertical verde, sobre P_0.

En Cálculo I, la derivada se define como el límite del cociente incremental dado en (1). El límite del cociente incremental análogo en Cálculo II viene dado por

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0) = D_{\vec{u}}f(P_0) = \lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0 + \rho\cos\theta\,, y_0 + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) - f(x_0, y_0)}{\rho} = \mathrm{tg}\,\alpha$$

DERIVADAS PARCIALES

Las derivadas parciales son las derivadas direccionales utilizando $\vec{u}$ igual a alguno de los vectores de la base canónica. Por ejemplo, si $n = 2$, existen dos derivadas parciales y se obtienen al derivar en las direcciones $\vec{u} = \vec{e}_1 = (1,0)$ y $\vec{u} = \vec{e}_2 = (0,1)$.

Derivada parcial respecto de $\boldsymbol{x}$

La derivada parcial respecto a x es la derivada direccional con $\vec{u} = \vec{e}_1 = (1{,}0)$. En la literatura se utilizan diversas notaciones alternativas y equivalentes para esta derivada parcial particular. Algunas de ellas son:

$$D_{\vec{e}_1} f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} = f_x(P_0) = f_x(x_0, y_0)$$

Incluso, si la variable dependiente es z, esto es $z = f(x, y)$, también se suelen utilizar las notaciones

$$\frac{\partial z}{\partial x}(P_0) = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} = z_x(P_0) = z_x(x_0, y_0)$$

Al trabajar en esta dirección particular, los puntos arbitrarios $P = (x, y)$ que se deben considerar en la definición de derivada direccional deben ser tales que en la Figura 12 resulte $\Delta x = \rho$, $\Delta y = 0$. Esto es, la variación o acercamiento de P a P_0 se realiza en la dirección del eje x, manteniendo constante $y = y_0$ (ver Figura 13).

Incorporando estas particularidades a la definición general de derivada direccional resulta:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

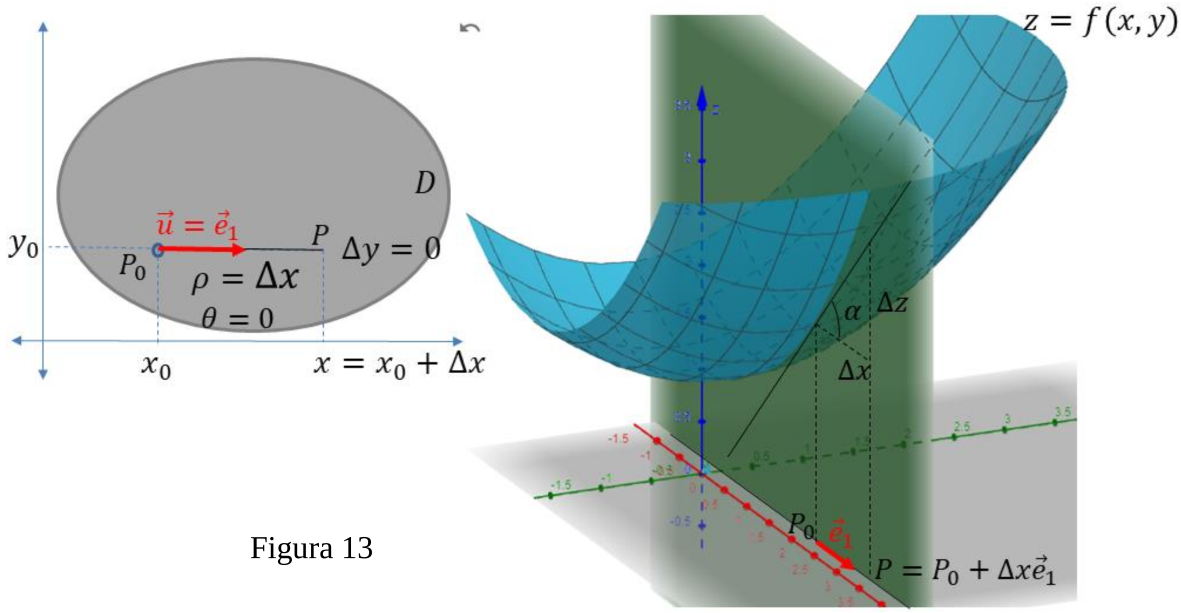


Figura 13

De este modo, el problema de dos variables se reduce a una variable (visto en Cálculo I), y la derivación se realiza igual que en funciones de una sola variable, pero considerando a y una constante más en la expresión.

Por ser una derivada direccional geométricamente representa la pendiente de la recta tangente a la curva que se obtiene al intersecar la superficie $z = f(x, y)$ con un plano vertical, que en el caso de la parcial con respecto al eje x, sería paralelo al plano coordenado $y = y_0$ (Figura 13).

El punto P_0 se ha fijado arbitrariamente dentro del dominio de f, pero para que tenga sentido la definición de derivada parcial se consideran sólo los puntos P_0 para los cuales el límite existe. Luego, en general, la derivada parcial se puede calcular sobre un subconjunto de puntos de D, y por ende, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ (o simplemente $\frac{\partial f}{\partial x}$) es una función de dos variables también.

Ejemplos:

- Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ si $f(x, y) = x^2y - xy^3 + 2x - y + 1$, y luego evaluarla en $P_0(0,1)$

  Solución: Derivamos f como si su única variable fuese x y tratando a y como si fuese una constante más en la expresión. Esto es:

  $$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - y^3 + 2$$

  Luego, al evaluarla en el punto

  $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 2.0.1 - 1^3 + 2 = 1$$

- Calcular z_x si $z = \operatorname{sen} x \cos y + e^{xy}$, y luego evaluarla en $P_0(-\pi, 0)$

  Solución:

  $$z_x = \cos x \cos y + ye^{xy}$$

  $$z_x(-\pi, 0) = \cos(-\pi) \cos(0) + 0. e^0 = -1$$

Derivada parcial respecto de y

El concepto de derivada parcial respecto de y es análogo al de derivada parcial respecto de x pero considerando la dirección de $\vec{u} = \hat{e}_2$. Luego, la notación es similar también:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} = f_y(P_0) = f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial y}(P_0) = \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} = z_y(P_0) = z_y(x_0, y_0)$$

Los puntos arbitrarios $P = (x, y)$ que se deben considerar en la definición de derivada direccional deben ser tales que en la Figura 12 resulte $\Delta x = 0$, $\Delta y = \rho$. Esto es, la variación o acercamiento de P a P_0 se realiza en la dirección del eje y, manteniendo constante $x = x_0$ (ver Figura 14).

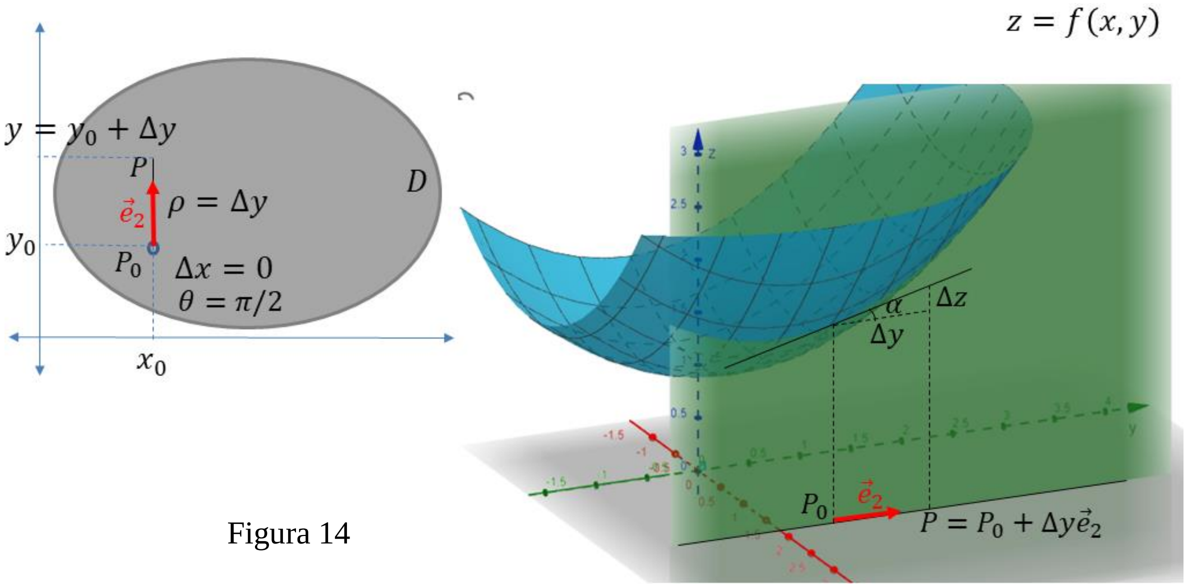


Figura 14

Incorporando estas particularidades a la definición general de derivada direccional resulta:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Resulta nuevamente un límite en el que interviene f como función de una sola variable (y) ya que la variable x permanece constante e igual a x_0.

Nuevamente por ser una derivada direccional geométricamente representa la pendiente de la recta tangente a la curva que se obtiene de intersecar la superficie $z = f(x, y)$ con un plano vertical, que en el caso de la parcial con respecto al eje y, será la pendiente de la recta tangente a la curva que resulta de intersecar la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $x = x_0$ (Figura 14).

Ejemplos:

- Calcular $\frac{\partial f}{\partial y}$ si $f(x,y) = x^2y - xy^3 + 2x - y + 1$, y luego evaluarla en $P_0(0,1)$

  Solución: Derivamos f como si su única variable fuese y y tratando a x como si fuese una constante más en la expresión. Esto es:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 3xy^2 - 1$$

  Luego, al evaluarla en el punto

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0^2 - 3.0.1^2 - 1 = -1$$

- Calcular z_y si $z = \operatorname{sen} x \cos y + e^{xy}$, y luego evaluarla en $P_0(-\pi, 0)$

  Solución:

$$z_y = -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + xe^{xy}$$

$$z_y(-\pi, 0) = -\operatorname{sen}(-\pi)\operatorname{sen}(0) - \pi e^0 = -\pi$$

La regla de derivación vista, esto es, derivar respecto a una variable dejando a la otra (o las demás) constante no se puede aplicar si la función se define por partes en un entorno del punto en cuestión. Por ejemplo, consideremos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

y tratemos de calcular sus derivadas parciales en el punto $(0,0)$. En este caso no se puede usar la regla práctica de derivación a $\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ ya que en el punto la función no se define con esta fórmula. Tampoco se puede derivar la constante 0 ya que en el entorno del punto la función no es constante. En este caso se debe recurrir al cálculo de las derivadas parciales por definición usando el límite del cociente incremental, esto es:

$$f_x(P_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta x^2 0}{\Delta x^4 + 0^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

Notar que inicialmente el límite presenta una indeterminación, la cual se salva algebraicamente mediante simplificaciones en las cuales el cociente incremental se anula antes de aplicar el límite. Análogamente, se puede calcular la otra derivada parcial:

$$f_y(P_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0,0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{0^2 \Delta y}{0^4 + \Delta y^2} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} 0 = 0$$

Definición:

Un campo escalar $u = f(\vec{P})$ se dice derivable en un punto del dominio $\vec{P}_0 \in D$ si existen todas sus derivadas parciales en $\vec{P}_0$.

Por ejemplo la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es derivable en $\vec{P}_0 = (0,0)$. Sin embargo, no es continua en el punto ya que, como vimos anteriormente, no existe el límite en tal punto. Esto muestra que derivabilidad no implica continuidad. La recíproca tampoco vale, esto es, continuidad no implica derivabilidad. Se deja como ejercicio verificar esto utilizando la función $f(x,y) = |x|$.

Derivada Direccional y el Vector Gradiente

Necesitamos encontrar una expresión que permita calcular la derivada direccional usando las derivadas parciales.

Para ello incorporemos los puntos A y B diagramados en la Figura 15 a la notación considerada para definir el concepto de Derivada Direccional. Estos puntos quedan completamente determinados por el punto P y cumplen el rol que cumplió el punto genérico P al definir las derivadas parciales, esto es, varían solamente en la dirección de los ejes coordenados.

Partiendo de la definición de derivada direccional

$$D_{\vec{u}} f(P_0) = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(P) - f(P_0)}{\rho} = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(P) - f(A) + f(A) - f(P_0)}{\rho}$$

$$D_{\vec{u}} f(P_0) = \lim_{\rho \to 0} \left[\frac{f(P) - f(A)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\rho} \right] + \lim_{\rho \to 0} \left[\frac{f(A) - f(P_0)}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\rho} \right]$$

Tenemos la siguiente equivalencia en el límite: $\rho \to 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ P \to P_0 \\ A \to P_0 \end{cases}$

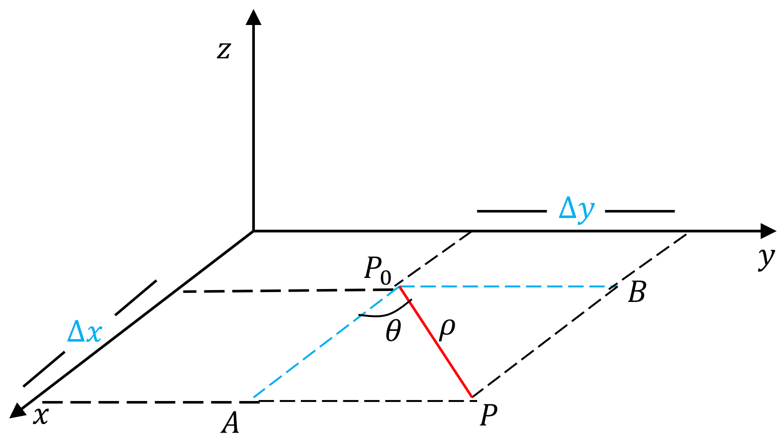


Figura 15

Además, $\cos(\theta) = \frac{\Delta x}{\rho}$ y $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{\Delta y}{\rho}$ son constantes cuando nos acercamos a P_0 respetando la dirección dada por $\vec{u}$. Luego

$$D_{\vec{u}} f(P_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{f(P) - f(A)}{\Delta y}\right] \operatorname{sen}(\theta) + \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(A) - f(P_0)}{\Delta x}\right] \cos(\theta)$$

Considerando que las derivadas parciales existen y son continuas resulta

$$D_{\vec{u}} f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \operatorname{sen}(\theta) + \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \cos(\theta)$$

$$D_{\vec{u}} f(P_0) = \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\right]}_{\overrightarrow{\operatorname{grad}(f)}\big|_{P_0} = \vec{\nabla} f(P_0)} . \underbrace{[\cos(\theta) \quad \operatorname{sen}(\theta)]}_{\breve{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}} = \vec{\nabla} f(P_0) . \breve{u}$$

Luego por la arbitrariedad del punto P_0 resulta que en general

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \overrightarrow{\nabla f} . \breve{u}$$

siendo $\overrightarrow{\nabla f} = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y}\right]$ el vector gradiente del campo escalar f, y

$$\breve{u} = \left[\frac{\Delta x}{\rho} \ , \frac{\Delta y}{\rho}\right] = [\cos(\theta)\,, \mathrm{sen}(\theta)]$$

el versor en la dirección del vector $\vec{u}$.

Por lo tanto, la derivada direccional se calcula mediante el producto escalar de dos vectores. El primero tiene la información sobre el campo y el segundo sobre la dirección.

Esta fórmula se generaliza análogamente para campos de n variables.

Teniendo en cuenta la definición de producto escalar de dos vectores, la expresión anterior se puede calcular como el producto de los módulos de los vectores por el coseno del ángulo comprendido entre ellos (lo denotaremos φ).

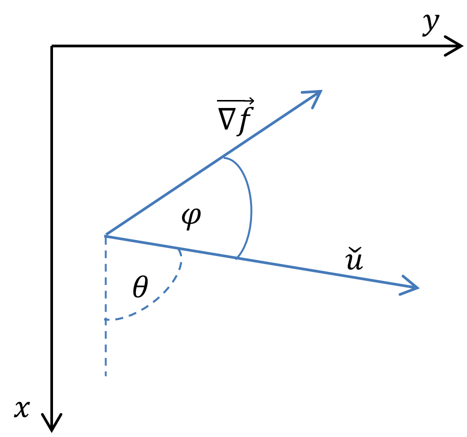


Figura 16

La Figura 16 incorpora también al ángulo θ (ángulo comprendido entre el eje x y el vector $\hat{u}$) el cual no debe confundirse con φ.

Luego, teniendo en cuenta que el módulo del versor es uno, la expresión queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \left\|\overrightarrow{\nabla f}\right\|. \cos \varphi$$

La derivada direccional es igual a la proyección del vector gradiente según la dirección en que derivamos

Ejemplo: Hallar la derivada direccional del campo $z = x^2 y$ en el punto $P_0(2,1)$ según la dirección que va de P_0 a $P_1(5,5)$

Solución: Para calcular la derivada direccional debo tener en cuenta tres datos: El campo escalar al cual le calcularé el gradiente, el punto donde debo calcular la derivada y la dirección

a) Cálculo del gradiente:

Se debe calcular cada una de las derivadas parciales y evaluarlas en el punto. Esto es:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 \end{array}\right|_{P_0} = \begin{array}{l} 4 \\ \\ 4 \end{array}$$

Por lo tanto $\overrightarrow{\nabla f}\Big|_{P_0} = (4\,,4)$

b) Cálculo de la dirección:

En este caso la dirección es la que va desde el punto P_0 a $P_1(5{,}5)$, la cual como se calcula como

$$\vec{u} = \overrightarrow{P_1} - \vec{P}_0 = (5{,}5) - (2{,}1) = (3{,}4)$$

$$\breve{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(\frac{3}{5}\,,\quad \frac{4}{5}\right)$$

c) Cálculo de la derivada direccional:

$$D_{\vec{u}}f|_{P_0} = \vec{\nabla} f(P_0).\breve{u} = (4 \quad 4).\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix} = \frac{28}{5}$$

Propiedades del vector gradiente y de la derivada direccional.

Se debe tener en cuenta que tanto el vector gradiente como la dirección $\vec{u}$ se ubican siempre en el dominio del campo escalar, o sea en el plano xy para el caso de un campo $z = f(x, y)$

Luego otra interpretación gráfica de la derivada direccional puede ser la siguiente: La derivada direccional según $\breve{u}$ es la proyección del vector gradiente en esa dirección y está representada por la longitud del segmento que se indica en la Figura 16

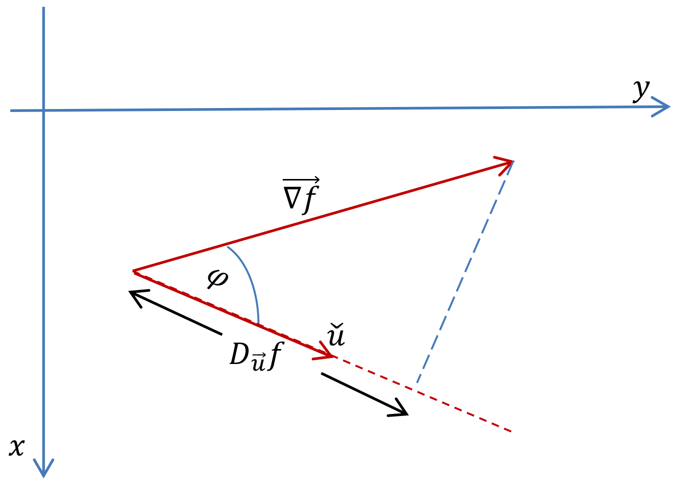


Figura 17

Se puede observar de la ecuación (1) y de la figura las siguientes propiedades de la derivada direccional y del vector gradiente

- La derivada direccional es máxima cuando $\varphi = 0$ o lo que es lo mismo decir cuando la dirección del vector $\vec{u}$ coincide con la dirección del gradiente
- La derivada direccional es máxima en la dirección del gradiente y vale el módulo del gradiente, ya que $\cos\varphi = \cos 0 = 1$.
- La derivada direccional es mínima cuando $\varphi = \pi$ y vale $-\left\|\overrightarrow{\nabla f}\right\|$
- La derivada direccional es nula cuando $\varphi = \frac{\pi}{2}$ es decir cuando el gradiente es perpendicular a la dirección $\vec{u}$
- $\frac{\partial z}{\partial \vec{u}} > 0$ para $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ luego la función crece en esa dirección
- $\frac{\partial z}{\partial \vec{u}} < 0$ para $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ luego la función decrece en esa dirección
- El vector gradiente es perpendicular a la curva de nivel en P_0 y tiene el sentido de las cotas crecientes.

Conclusión:

- **La Derivada Direccional es máxima en la dirección del gradiente**
- **El vector gradiente es perpendicular a la curva de nivel, y apunta hacia las cotas crecientes**
- **La derivada direccional en la dirección de las curvas de nivel es nula**