Preguntas de teoría: Cálculo II (IPE-MEC)

UNIDAD 1: CAMPOS ESCALARES

1. Explique qué es un "campo escalar". Defina su dominio, imagen y curvas de nivel. Ejemplifique.
2. Explique con sus palabras el concepto de límite en campos escalares. Dar un contraejemplo que muestre que la existencia del límite en cualquier dirección recta no es suficiente para asumir la existencia del límite.
3. Explique con sus palabras el concepto de límite en campos escalares. Mostrar con un ejemplo el concepto de límites iterados. ¿Son suficientes la existencia e igualdad entre estos límites para asegurar la existencia del límite?
4. ¿Cuándo una función $z = f(P)$ es continua en P_0? Dar un ejemplo de función discontinua en P_0.
5. Dado el campo escalar $z = f(x, y)$, defina derivada direccional en la dirección del vector $\vec{u}$ en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$ y muestre una interpretación geométrica de dicho concepto.
6. Explique el concepto de derivada parcial, y deduzca geométricamente la fórmula de cálculo de derivadas direccionales usando derivadas parciales.
7. ¿Qué relación hay entre función derivable y función continua? Muestre un ejemplo de una función derivable que no sea continua. Justifique.
8. ¿Qué relación hay entre función derivable y función continua? Muestre un ejemplo de una función continua que no sea derivable. Justifique.
9. Indique en qué dirección la derivada direccional es máxima, mínima y nula, muestre porqué sucede lo anterior. ¿Qué relación existe entre vector gradiente y curvas de nivel?
10. Dada $z = f(x, y)$ defina incremento, diferencial y muestre la relación que existe entre ellos. Brinde una interpretación geométrica. A partir de esta relación defina plano tangente a $z = f(x, y)$.
11. Una de las aplicaciones más importantes del diferencial es el cálculo aproximado del valor de la función en un punto próximo a uno conocido, explique este concepto.
12. ¿Cuándo una función es diferenciable? Dar un ejemplo en el que se pruebe por definición que una función es diferenciable.
13. ¿Qué relación hay entre función derivable y función diferenciable? Muestre un ejemplo de una función derivable que no sea diferenciable. Justifique.
14. ¿Qué relación hay entre función continua y función diferenciable? Muestre un ejemplo de una función continua que no sea diferenciable. Justifique.
15. Enunciar el teorema que relacionan a las funciones con derivadas parciales continuas y las funciones diferenciables.
16. Defina la aproximación de Taylor hasta el orden $n = 2$. Interprete gráficamente este concepto.
17. Defina la aproximación de Taylor hasta el orden n. ¿Qué relación hay entre el error de aproximación y ρ? Ejemplifique.
18. Dada $z = f(x, y)$ con $x = X(u, v)$, $y = Y(u, v)$. Dar fórmulas de cálculo para $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$. Ejemplifique.
19. Dada $F(x, y, z) = 0$, dar fórmulas de cálculo para $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$. Ejemplifique.
20. Dada $z = f(x, y)$ defina plano tangente, vector normal y recta normal en $P_0(x_0, y_0)$. Ejemplifique.
21. Dada $F(x, y, z) = 0$ defina plano tangente, vector normal y recta normal en $P_0(x_0, y_0)$.
22. Dar la condición necesaria y suficiente para ser punto estacionario de una función $z = f(x, y)$. Interprete geométricamente.
23. Si $P_0(x_0, y_0)$ es un punto estacionario de $z = f(x, y)$, ¿cómo podría usted afirmar que es un máximo, un mínimo o un punto de ensilladura? Justifique a partir de la aproximación de Taylor de segundo orden.
24. ¿Cuáles son los pasos a seguir para determinar los puntos extremos de un campo escalar? Ejemplificar.
25. Explique los pasos a seguir para obtener los extremos de un campo escalar $z = f(x, y)$ condicionada a la relación $\varphi(x, y) = 0$. Ejemplifique.

UNIDAD 2: INTEGRACIÓN DE CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

26. Dado el campo escalar $z = f(x,y)$, definir $\iint_R f(x,y)dxdy$. Brindar una interpretación geométrica.
27. Dado el campo escalar $z = f(x,y)$, definir integrales reiteradas y dar una interpretación geométrica. ¿Es válida la igualdad $\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_R f(x,y)dydx$?
28. Dado el campo escalar $z = f(x,y)$, explicar el concepto de integral sobre recintos generales. Dar un ejemplo de recinto x-simples pero no y-simples, y viceversa. Dar un ejemplo de recinto ρ-simple pero no θ-simple, y viceversa.
29. ¿Se puede calcular el área de una región y el volumen de un sólido con una integral doble? Justifique.
30. Explique con sus palabras lo que sucede al realizar un cambio de coordenadas al momento de calcular una integral. Muestre en particular cómo es el cambio de coordenadas de rectangulares a polares. Ejemplifique.
31. Definir los conceptos de masa, centro de masa y momento de inercia de una lámina plana. Ejemplifique.
32. ¿Qué es una integral triple? ¿Cuál es el dominio de integración? ¿Cómo se puede usar para hallar el volumen de un sólido? Ejemplifique.
33. En el espacio, ¿qué sistemas de coordenadas conoce?
    a) Indique las relaciones entre ellas.
    b) Muestre representaciones gráficas de puntos en cada sistema.
    c) Especifique Jacobianos.
34. ¿Se puede calcular el volumen de un sólido con una integral triple? Justifique. Ejemplifique.
35. Definir los conceptos de masa, centro de masa y momento de inercia de un sólido. Ejemplifique.
36. ¿Qué es una curva? Enumerar las distintas formas en las que se puede definir una curva del plano $\mathbb{R}^2$ y del espacio $\mathbb{R}^3$. Ejemplifique.
37. ¿Cómo se calcula el límite al trabajar con curvas? ¿Qué tiene que pasar para que una curva sea continua? Dar un ejemplo de curva discontinua.
38. ¿Cómo se calculan derivadas al trabajar con curvas? Interprete geométricamente. Ejemplifique.
39. ¿Cuándo se dice que una curva es diferenciable? Deducir que $d\vec{r}(t) = \vec{r}'(t)dt$.
40. Definir Punto Regular, Curva Regular, Curva Regular a trozos. Ejemplifique gráficamente.
41. Definir Curva Simple, Curva Cerrada y Curva de Jordan. Ejemplifique gráficamente.
42. Deduzca la fórmula de longitud de arco $L = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\|\, dt$, y utilícela para calcular el perímetro de una circunferencia de radio r.
43. Defina la función de longitud de arco $s(t)$ y deduzca que su diferencial viene dado por $ds = \|d\vec{r}(t)\|$.
44. Expresar la parametrización de un segmento rectilíneo y de una curva helicoidal de radio a y de paso P.
45. Definir integral curvilínea a lo largo de la curva C de un campo escalar $f(x,y,z)$. Explique cada uno de los elementos que aparecen en la expresión.
46. Enunciar las propiedades de Linealidad y Cambio de sentido de integración en Integrales Curvilíneas.
47. Enunciar las propiedades de Aditividad respecto al Camino de Integración e Independencia de la representación paramétrica en Integrales Curvilíneas.
48. Definir los conceptos de masa, centro de masa y momento de inercia de un alambre o hilo. Ejemplifique.
49. Explique qué entiende por “campo vectorial”. ¿Qué casos particulares conoce?
50. Definir física y matemáticamente el concepto de Trabajo de una fuerza $\vec{F}$. A partir de este concepto desarrolle cómo se expresa el trabajo acumulado a lo largo de una curva C.
51. Definir integral curvilínea de un campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big)$. Explique cada uno de sus elementos. En base a esta definición ¿Qué entiende por Circulación de un campo $\vec{F}$?
52. Definir Campo Gradiente. Enuncie la condición Necesaria y Suficiente para que un campo vectorial sea Campo Gradiente. Demuestre la condición Necesaria.
53. ¿Qué entiende por dominio Simplemente Conexo? Explique mediante un ejemplo la necesidad de que el dominio de un campo conservativo sea Simplemente Conexo.
54. Explique el método de cálculo para determinar la Función Potencial $\varphi(x,y,z)$ de un campo gradiente. Ejemplifique.

55. Enuncie el Teorema Fundamental de los Campos Gradientes y demuestre la fórmula que permite calcular integrales curvilíneas de campos gradientes usando su función potencial. Ejemplifique.
56. Enuncie y demuestre el Teorema de Green. Explicar cómo puede ser usado para calcular áreas. Ejemplifique.
57. Explique cómo parametriza una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ en el espacio ¿Qué supuestos considera? Ejemplifique.
58. Deduzca la expresión para el diferencial de superficie dado por $dS = \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| du dv$.
59. ¿Se pueden calcular áreas con integrales de superficie? Desarrolle. Ejemplifique.
60. Definir Integral de Superficie de Campos Escalares. Explique cada uno de los elementos que aparecen.
61. Definir los conceptos de masa, centro de masa y momento de inercia de una superficie alabeada. Ejemplifique.
62. ¿Qué entiende por Superficie Orientable? ¿Todas las superficies verifican esta propiedad? Ejemplifique.
63. Definir diferencial vectorial de superficie e Integral de Superficie de un Campo Vectorial. Explique cada uno de sus elementos.
64. ¿De qué depende el signo del Flujo de un campo vectorial? ¿A qué se denomina Caudal Volumétrico? ¿A qué se denomina Flujo Neto de un campo vectorial? ¿Qué sucede si este balance es positivo, negativo o nulo?
65. Defina Divergencia de un campo vectorial $\vec{F} = (P, Q, R)$, interprete y exprese la versión rectangular de su fórmula de cálculo. Ejemplifique.
66. Enunciar el Teorema de Gauss. Explique cada uno de sus elementos. Ejemplifique.
67. Definir Vector Rotor de un campo vectorial $\vec{F} = (P, Q, R)$. Interpretar físicamente su utilidad. ¿Qué cuantifica $\overrightarrow{\mathrm{rot}(\vec{F})}.\vec{n}$? ¿Qué sucede si esta magnitud es nula? Ejemplifique.
68. Enunciar el Teorema de Stokes. Explique cada uno de sus elementos. Ejemplifique.

UNIDAD 3: ECUACIONES DIFERENCIALES

69. Definir Ecuación Diferencial. ¿Qué diferencia existe entre EDO y EDDP? ¿Qué es el orden de una EDO? ¿Cuándo una EDO es lineal? Ejemplifique.
70. Definir Ecuación Diferencial. ¿Cuándo una EDO es de primer orden? Mostrar los pasos que se deben realizar para pasar de la forma implícita a la explícita, y viceversa. Ejemplifique.
71. Definir Solución de una EDO. Mediante un ejemplo, caracterice Solución General, Solución Particular y Solución Única. ¿Qué es una Solución Singular?
72. ¿Qué entiende por Problema de Valor Inicial (PVI)? ¿Qué permite responder el Teorema de Existencia y Unicidad respecto de un PVI? Justifique. Ejemplifique.
73. Desarrolle los pasos del Método de Separación de Variables para encontrar la solución a la EDO de la forma $y' = f(x, y)$. Ejemplifique.
74. Aliste los pasos del Método de Diferencial Exacta para encontrar la solución a la EDO expresada de forma implícita a través de $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$. Ejemplifique.
75. Deduzca los pasos extras (para uno de los casos a su elección) que propone el método para ecuaciones reducibles a exacta para encontrar la solución a la EDO expresada de forma implícita a través de $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$. Ejemplifique.
76. Desarrolle los pasos del Método para Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden para encontrar la solución a la EDO expresada como $y' + p(x)y = f(x)$. Ejemplifique.
77. Definir Ecuación Diferencial Lineal de Orden n. Deduzca la versión compacta usando el operador derivada.
78. ¿Cómo se encuentra compuesta la Solución General de una Ecuación Diferencial Lineal de Orden n? Desarrolle. Ejemplifique.
79. Demuestre que $y = e^{rx}$ es solución de la EDO Lineal Homogénea de Segundo Orden.
80. Escriba la forma propuesta para la solución homogénea en cada uno de los casos estudiados para una EDO lineal de segundo orden.
81. ¿Bajo qué condiciones y para qué se aplica el Método de Coeficientes Indeterminados? Ejemplifique.
82. Explique mediante un ejemplo cuál es el procedimiento a realizar cuando existe dependencia lineal entre algún término de la Solución Particular y de la Solución Homogénea.
83. Explique con sus palabras cómo se aplica el método de sustitución para la resolución de sistemas de EDO Lineales. Ejemplifique.