

CALCULO II

Ingeniería Mecánica Ingeniería Electromecánica

Equipo de Cátedra

Profesor Titular

Dr. Javier Gimenez

Profesor Adjunto

Dr. Emanuel Tello

Jefe de Trabajos Prácticos

Mg. Juan Pablo Llarena

AÑO 2024

INTEGRALES DE SUPERFICIES DE CAMPOS VECTORIALES

INTRODUCCIÓN

Se definieron dos tipos de integrales curvilíneas, una para campos escalares y su generalización para campos vectoriales. Veamos las diferencias entre ambas integrales:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt \quad \text{vs} \quad \int_C \vec{F}(x, y, z) d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

Se aprecian dos diferencias:

- La primera es el cambio del diferencial escalar ds por el diferencial vectorial $d\vec{r}$
- La segunda es que se eliminó el módulo o norma del vector $\vec{r}'(t)$

Conservando la misma filosofía de generalización, la generalización natural de las integrales de superficie sobre campos escalares

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_H f(\vec{r}(u, v)) \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| du dv$$

viene dada por una expresión de la forma

$$\iint_S \vec{F}(x, y, z) d\vec{S} = \iint_H \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{r}_u \wedge \vec{r}_v du dv$$

Para que esta definición tenga sentido deberíamos definir que es el diferencial vectorial de superficie $d\vec{S}$, y deberíamos interpretar físicamente el resultado que se obtiene al resolver la integral. Estos objetivos los resolveremos a lo largo del capítulo, pero antes estudiaremos el concepto de superficie orientable, el cual es trascendental para desarrollar los conceptos mencionados.

Superficies Orientables

Es deseable que en cada punto de una superficie de $\mathbb{R}^3$ existan dos vectores normales que tengan la misma dirección pero sentido opuesto. Dependiendo del orden en que se realiza el producto vectorial, se halla uno o el otro (ver Fig. 1).

Es deseable que al desplazar el punto de aplicación sobre la superficie, tanto el vector normal $\vec{n}_1$ como el vector normal $\vec{n}_2$ siempre queden apuntando hacia el mismo lado de la superficie, esto es, es deseable que la superficie tenga dos caras. Las

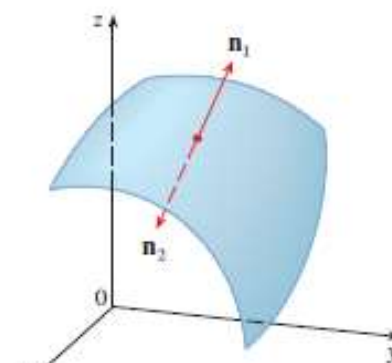


Figura 1

superficies que verifican esta propiedad se denominan **superficies orientables**.

No todas las superficies son orientables, incluso hay superficies regulares que no son orientables como la Cinta de Möbius. La Figura 2 muestra intuitivamente el proceso de construcción de la Cinta de Möbius, la cual resulta tener una sola cara.

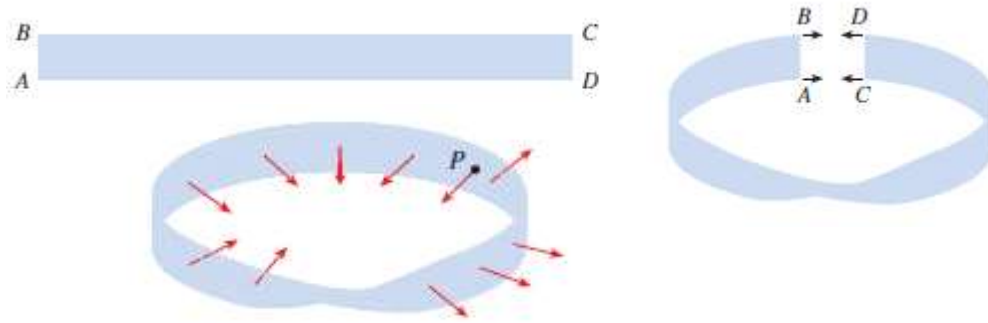


Figura 2: La superficie llamada Cinta de Möbius es un ejemplo de superficie que tiene una sola cara. Para construirla se debe tomar una cinta de papel, hacerle un doblez y luego pegarle los extremos. Si toma un lápiz y desplaza la punta sin levantarla por la cara interna de la cinta desde un punto P , al completar un giro se llega al punto P pero del otro lado de la cinta. Eso significa que la superficie tiene una sola cara.

Una posible parametrización de la Cinta de Möbius es

$$\vec{r}(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$$

siendo

$$\begin{cases} x = X(u, v) = (1 + v \cos(u)) \cos(2u) \\ y = Y(u, v) = (1 + v \cos(u)) \sin(2u) \\ z = Z(u, v) = v \sin(u) \end{cases}$$

con $0 \leq u \leq \pi$, $-1 \leq v \leq 1$.

Note que fijando $v = 0$, se forma la curva C de ecuación paramétrica

$$\begin{cases} x = \cos(2u) \\ y = \sin(2u) \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq u \leq \pi$$

O equivalentemente, haciendo $t = 2u$,

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq t \leq 2\pi$$

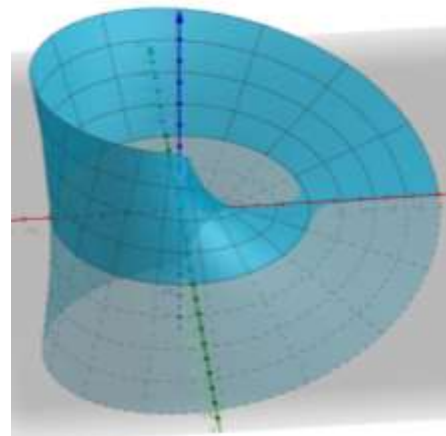


Figura 3

Esta curva es una circunferencia de radio 1 que forma parte de la superficie. Analicemos como es el vector normal a la superficie y luego veamos cómo cambia el mismo al deslizarnos por la superficie siguiendo la curva cerrada C .

Comencemos calculando el vector normal a la superficie:

$$\vec{r}_u = (X_u, Y_u, Z_u) \quad \text{con} \quad \begin{cases} X_u = -\sin(u) (4 \cos(u) - v + 6v \cos^2(u)) \\ Y_u = 6v \cos^3(u) + 4 \cos^2(u) - 4v \cos(u) - 2 \\ Z_u = v \cos(u) \end{cases}$$

$$\vec{r}_v = (X_v, Y_v, Z_v) \quad \text{con} \quad \begin{cases} X_v = 2 \cos^3(u) - \cos(u) \\ Y_v = -2 \sin(u) (\sin^2(u) - 1) \\ Z_v = \sin(u) \end{cases}$$

Por lo tanto, un vector normal viene dado por

$$\vec{N} = \vec{r}_u \wedge \vec{r}_v = (a, b, c)$$

con

$$a = \sin(3u) - \sin(u) - v \sin(2u) + \frac{v}{2} \sin(4u)$$

$$b = 4 \cos(u) - v + 6v \cos^2(u) - 4v \cos^4(u) - 4 \cos^3(u)$$

$$c = -2 \cos(u) (v \cos(u) + 1)$$

Note que $\vec{r}(0,0) = \vec{r}(\pi,0) = (1,0,0)$ es un punto de la superficie, que además es el punto inicial y final de la curva cerrada C .

Sin embargo, usando $(u, v) = (0,0)$ el vector normal resulta ser

$$\vec{N} = (a, b, c) = (0,0,-2)$$

y usando $(u, v) = (\pi, 0)$ el vector normal resulta ser

$$\vec{N} = (a, b, c) = (0,0,2)$$

Note que al deslizarnos por la superficie de forma continua siguiendo la curva C , el vector normal paso de ser $(0,0,-2)$ a ser el opuesto $(0,0,2)$ luego de cerrar el circuito. Esto muestra que la cinta de Möbius tiene una sola cara, y que por ende no es una superficie orientable.

De ahora en más, para evitar ambigüedades, trabajaremos sólo con superficies orientables.

Interpretación física (Flujo)

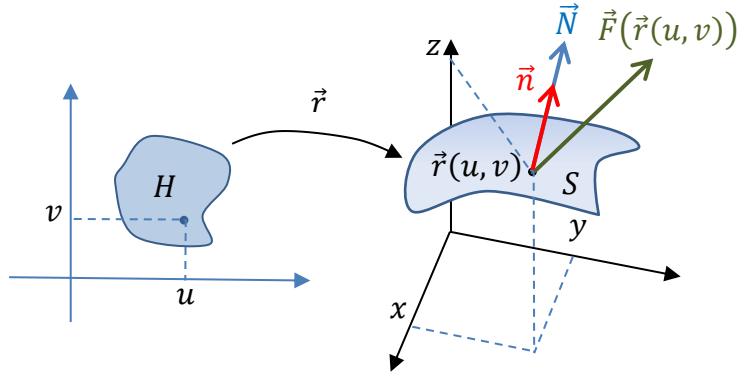


Figura 4

Analicemos en detalle cada parte de la propuesta de definición de integrales de superficie de campos vectoriales (ver Fig. 4 para más detalles) dada por:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_H \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{r}_u \wedge \vec{r}_v du dv \quad (1)$$

(u, v) son los parámetros y $\vec{r}$ es la parametrización de la superficie S

$\vec{r}(u, v)$ es un punto arbitrario de la superficie

$\vec{F}(\vec{r}(u, v))$ es el valor vectorial que toma el campo en el punto $\vec{r}(u, v)$

$\vec{N} = \vec{r}_u \wedge \vec{r}_v$ es un vector normal a la superficie en el punto $\vec{r}(u, v)$

Partiendo de (1), si $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\|}$ es un vector unitario normal a la superficie en el punto $\vec{r}(u, v)$ entonces

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_H \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n} \cdot \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| du dv$$

$\vec{n}$ depende del punto $\vec{r}(u, v)$ de S sobre el que se está trabajando, por lo que en realidad deberíamos escribir $\vec{n} = \vec{n}(\vec{r}(u, v))$, esto es

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_H \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n}(\vec{r}(u, v)) \cdot \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| du dv = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \quad (2)$$

donde en la última igualdad se usó la definición de integral de superficie del campo escalar $\vec{F} \cdot \vec{n}$.

De (2) surge que la definición natural del diferencial vectorial de superficie es

$$d\vec{S} = \vec{n} dS = \vec{r}_u \wedge \vec{r}_v du dv$$

Además, se pueden hacer las siguientes observaciones:

- $\vec{F} \cdot \vec{n} = 0$ cuando el campo es tangencial a la superficie en el punto en cuestión.
- $\vec{F} \cdot \vec{n} = \|\vec{F}\| \cos(\text{ang}(\vec{F}, \vec{n}))$
- $\vec{F} \cdot \vec{n}$ cuantifica el nivel de penetración del campo en la superficie S . Esta idea intuitiva se la denomina flujo, y la integral sobre S representa el flujo total o acumulado ϕ del campo sobre S en la dirección determinada por $\vec{n}$

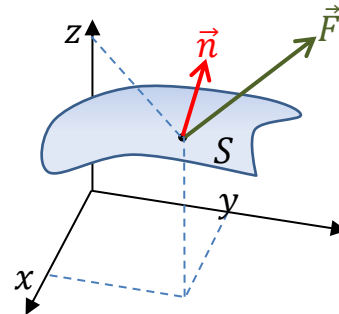


Figura 5

Integral de superficie de campos vectoriales

Definición

Sea $\vec{F}(x, y, z)$ un campo vectorial continuo y acotado en $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Sea $S \subseteq D$ una superficie regular y orientable, con una representación paramétrica dada por

$$\vec{r}(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \quad \text{con } (u, v) \in H \quad \text{tal que} \quad \vec{r}(H) = S$$

Se define la integral de superficie de campos vectoriales como

$$\underbrace{\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}}_{\text{Int. Sup. Campos Vectoriales}} = \underbrace{\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS}_{\text{Int. Sup. Campos Escalares}} = \underbrace{\iint_H \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{r}_u \wedge \vec{r}_v \, du \, dv}_{\text{Integral Doble}}$$

Observaciones:

- La definición depende del sentido del vector normal, por lo que debe especificarse para evitar confusiones. Aquí es donde se hace evidente la necesidad de que la superficie sea orientable para evitar ambigüedades.
- Cuando $\vec{F} = \vec{V}$ es la velocidad de un fluido, la integral se llama caudal volumétrico.
- Para un campo $\vec{F}$ cualquiera, la integral se llama Flujo de $\vec{F}$.
- Si $\phi > 0$ entonces el flujo será a favor de la dirección de $\vec{n}$.
- Si $\phi < 0$ entonces el flujo del campo vectorial $\vec{F}$ es contrario a la dirección de $\vec{n}$.
- Si la superficie es cerrada se habla de flujo entrante o flujo saliente de acuerdo a la dirección de $\vec{n}$.

Ejemplo 1

Hallar el flujo del campo vectorial $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ sobre la superficie $z = x^2 + y^2$ limitada por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$

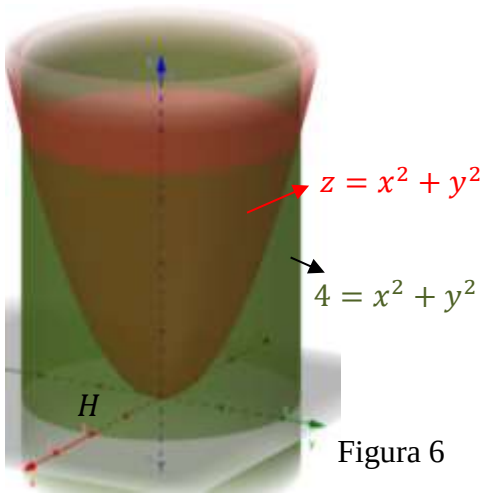


Figura 6

S es la porción de Paraboloide que queda limitada por el cilindro. La proyección de la superficie delimitada por el cilindro es el círculo H . A cada punto de H le corresponde como altura la z del paraboloide, la cual expresada en las coordenadas polares queda $z = \rho^2$.

1. Se debe calcular $\vec{r}$, el vector normal fundamental, y expresar al campo vectorial en las coordenadas elegidas

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \\ z = \rho^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 2 \end{matrix} \quad \vec{r}(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), \rho^2)$$

Aquí es cuando deben preguntarse ¿en qué dirección estoy calculando el flujo?

Tenemos dos posibilidades:

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \vec{r}_\rho \wedge \vec{r}_\theta = \vec{r}_\rho \wedge \vec{r}_\theta \\ &= (-2\rho^2 \cos(\theta), -2\rho^2 \sin(\theta), \rho) \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \vec{r}_\theta \wedge \vec{r}_\rho = -\vec{r}_\rho \wedge \vec{r}_\theta \\ &= (2\rho^2 \cos(\theta), 2\rho^2 \sin(\theta), -\rho) \end{aligned}$$

Los resultados finales, como es de esperar, sólo variarán en el signo.

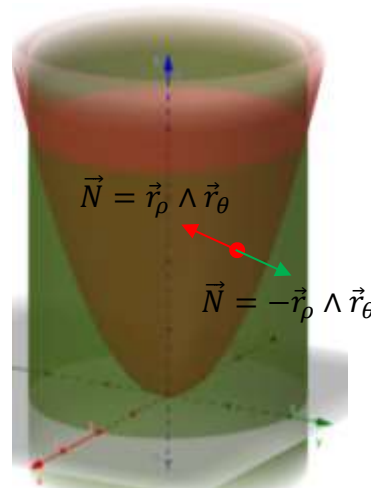


Figura 7

2. Se expresa el Campo Vectorial en términos de la parametrización.

$$\vec{F} = (x, y, z) \quad \Rightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}(\rho, \theta)) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), \rho^2)$$

$$\vec{F}(\vec{r}(\rho, \theta)) \cdot \vec{N} = (2\rho^3 \cos^2(\theta) + 2\rho^3 \sin^2(\theta) - \rho^3) = \rho^3$$

3. Ahora se calcula el Flujo como

$$\begin{aligned}\phi &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iint_H \vec{F}(\vec{r}(\rho, \theta)) \cdot \vec{r}_\rho \wedge \vec{r}_\theta d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^3 d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^4}{4} \Big|_0^2 \right) d\theta = \int_0^{2\pi} 4 d\theta = 8\pi\end{aligned}$$

Flujo a través de una superficie cerrada

Una superficie S es cerrada si encierra totalmente un volumen acotado y conexo V . Si se calcula una integral de superficie sobre una superficie cerrada se considera el vector normal saliente a no ser que se indique lo contrario.

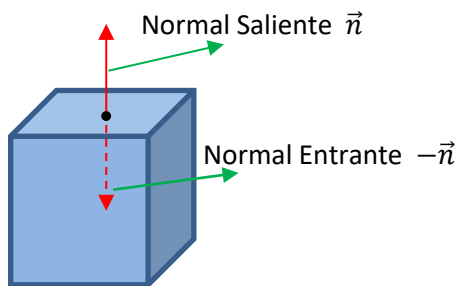


Figura 8

Anteriormente se dijo que si la superficie es orientable entonces existen dos vectores normales con igual dirección, pero sentidos opuestos

En la superficie cerrada de la Figura 8 hay dos normales por cara, la que apunta hacia afuera de la superficie cerrada (por convención considerada positiva) y la que apunta hacia el interior (considerada negativa)

Las líneas de campo entran y salen del sólido, originando flujos negativos (entrantes) y positivos (salientes). Luego, el flujo neto o total se define como

$$\phi_{\text{neto}} = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

- Si $\phi_{\text{neto}} > 0 \Rightarrow$ Entonces indica que el balance es positivo dominando el flujo saliente. Esto significa que sale más de lo que entra, por lo cual dentro del sólido hay una fuente.
- Si $\phi_{\text{neto}} < 0 \Rightarrow$ Entonces indica que el balance es negativo dominando el flujo entrante. Esto significa que sale menos de lo que entra, por lo cual dentro del sólido hay un sumidero.
- Si $\phi_{\text{neto}} = 0 \Rightarrow$ El Campo es solenoidal

Ejemplo: Hallar el flujo que atraviesa la superficie cerrada conformada por $S_1: x^2 + y^2 = 4$, $S_2: z = 0$ y $S_3: z = 5$ siendo $\vec{F} = (x, y, z)$.

Solución:

La representación paramétrica varía según la superficie. En este ejemplo se debe calcular el flujo en cada una de las superficies que limitan al sólido y luego sumar los resultados de cada flujo

1. Flujo a través del cilindro
2. Flujo a través del plano $z = 0$
3. Flujo a través del plano $z = 5$

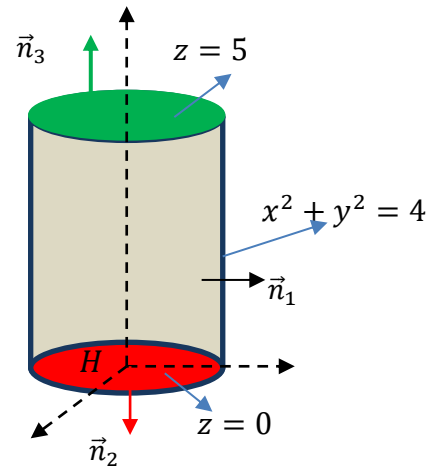


Figura 9

1. La superficie cilíndrica es la cáscara del cilindro, luego si se observa la Figura 9, el cilindro se genera tomando la circunferencia de la base y levantando cada uno de sus puntos siguiendo líneas rectas verticales. De esa forma la representación paramétrica será

$$\begin{cases} x = 2 \cos(\theta) \\ y = 2 \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 5 \end{matrix} \quad \vec{r}(\theta, z) = (2 \cos(\theta), 2 \sin(\theta), z)$$

El vector Normal Fundamental será

$$\vec{N} = \vec{r}_\theta \wedge \vec{r}_z = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ -2 \sin(\theta) & 2 \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{N} = (2 \cos(\theta), 2 \sin(\theta), 0)$$

Debo graficar este vector para poder determinar si es saliente. En este caso particular su tercer componente es cero, entonces me guío por los signos de las dos primeras componentes, las cuales en el primer cuadrante son positivas. Esto implica que $\vec{N}$ es saliente.

Por otro lado, el campo expresado en términos de la parametrización será

$$\vec{F}(\vec{r}(\theta, z)) = (2 \cos(\theta), 2 \sin(\theta), z)$$

$$\vec{F}(\vec{r}(\theta, z)) \cdot \vec{N} = 4$$

Por lo tanto, el flujo a través del cilindro será

$$\phi_{S_1} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iint_H \vec{F}(\vec{r}(\theta, z)) \cdot \vec{r}_\theta \wedge \vec{r}_z d\theta dz = \int_0^{2\pi} \int_0^5 4 dz d\theta = 40\pi$$

2. Flujo a través del plano $z = 0$

Podemos parametrizar en coordenadas cartesianas quedando

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} \quad \vec{N} = (0,0,1)$$

Pero como debe ser saliente elegimos el opuesto, o sea: $\vec{N} = (0,0,-1)$

El Campo expresado en la parametrización será

$$\vec{F}(\vec{r}(x,y)) = (x,y,0)$$

El producto escalar entre los dos últimos vectores será

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = 0$$

Luego

$$\phi_{S_2} = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iint_{S_2} 0 \, dS = 0$$

3. Flujo a través de S_3 :

La parametrización del plano $z = 5$ es

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 5 \end{cases}$$

Luego $\vec{N} = (0,0,1)$ es saliente a la superficie cerrada.

El campo expresado en la parametrización será

$$\vec{F}(\vec{r}(x,y)) = (x,y,5)$$

Luego

$$\vec{F} \cdot \vec{N} = 5$$

El flujo es

$$\phi_{S_3} = \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iint_H 5 \, dx \, dy$$

La región H es la proyección sobre el plano xy de la porción del plano $z = 5$ que se encuentra en el interior del cilindro (ver círculo rojo en la Figura 11).

Como H es un círculo conviene trabajar en coordenadas polares

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases} \quad \mathcal{J} = \rho \quad \begin{matrix} 0 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{matrix}$$

$$\phi_3 = \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{dS} = 5 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho \, d\rho = 20\pi$$

El flujo total será

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \phi_{S_1} + \phi_{S_2} + \phi_{S_3} = 40\pi + 0 + 20\pi = 60\pi$$

DIVERGENCIA DE UN CAMPO VECTORIAL

Para que estas propiedades sean independientes de la Superficie cerrada y que dependan de un punto se recurre al concepto de Divergencia del Campo Vectorial $\vec{F}$

Definición: Divergencia de un Campo Vectorial $\vec{F}$ en un punto P_0 está definida por

$$\text{div}(\vec{F})|_{P_0} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS}{\Delta V} \quad (1)$$

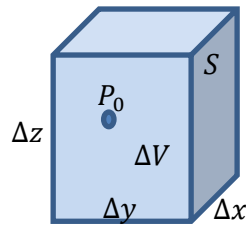


Figura 10

De su definición observamos que es una función puntual que mide la capacidad del campo de generar flujo. Es la cantidad de Flujo por unidad de Volumen que abandona el sólido. Se puede decir que

La divergencia es una densidad volumétrica de Flujo

Teorema: Si $\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ es un campo vectorial donde sus componentes P , Q y R tienen derivadas parciales continuas, entonces

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Demostración:

Si trabajamos con un volumen diagramado la Figura 10 entonces $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ donde $\Delta V \rightarrow 0$ sí, y sólo si, simultáneamente $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta z \rightarrow 0$.

Supongamos que $P_0(x_0, y_0, z_0)$ está en el centro del sólido

Las 6 caras del sólido en conjunto forman la superficie S que aparece en (1), esto es

$$S = S_x \cup S_{-x} \cup S_y \cup S_{-y} \cup S_z \cup S_{-z}$$

donde S_x , S_y y S_z son las caras indicadas en la Figura 11, mientras

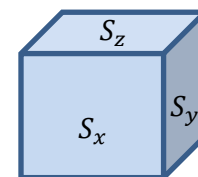


Figura 11

que S_{-x} , S_{-y} y S_{-z} son las caras opuestas.

Concentrémonos en la cara S_x , la cual se parametriza con

$$\vec{r}(y, z) = \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \quad \text{con} \quad y_0 - \frac{\Delta y}{2} \leq y \leq y_0 + \frac{\Delta y}{2}, \quad z_0 - \frac{\Delta z}{2} \leq z \leq z_0 + \frac{\Delta z}{2}$$

El vector normal viene dado por

$$\vec{N} = \vec{r}_y \wedge \vec{r}_z = (0, 1, 0) \wedge (0, 0, 1) = (1, 0, 0)$$

Luego

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}(y, z)) \cdot \vec{N} &= (P(\vec{r}(y, z)), Q(\vec{r}(y, z)), R(\vec{r}(y, z))) \cdot (1, 0, 0) = P(\vec{r}(y, z)) \\ &= P\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\phi_{S_x} = \int_{y_0 - \frac{\Delta y}{2}}^{y_0 + \frac{\Delta y}{2}} \int_{z_0 - \frac{\Delta z}{2}}^{z_0 + \frac{\Delta z}{2}} P\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right) dz dy$$

Como la superficie de integración es lo suficientemente pequeña, y P tiene derivadas parciales continuas, podemos aproximar $P\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y, z\right)$ con la constante $P\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right)$. Luego

$$\phi_{S_x} \approx \int_{y_0 - \frac{\Delta y}{2}}^{y_0 + \frac{\Delta y}{2}} \int_{z_0 - \frac{\Delta z}{2}}^{z_0 + \frac{\Delta z}{2}} \underbrace{P\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right)}_{\text{cte}} dz dy = P\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right) \Delta y \Delta z$$

Esta aproximación se convierte en identidad cuando $\Delta x \rightarrow 0$.

Análogamente se prueba que

$$\phi_{S_{-x}} \approx -P\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right) \Delta y \Delta z,$$

$$\phi_{S_y} \approx Q\left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0\right) \Delta x \Delta z, \quad \phi_{S_{-y}} \approx -Q\left(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0\right) \Delta x \Delta z$$

$$\phi_{S_z} \approx R\left(x_0, y_0, z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right) \Delta x \Delta y, \quad \phi_{S_{-z}} \approx -R\left(x_0, y_0, z_0 - \frac{\Delta z}{2}\right) \Delta x \Delta y$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(\vec{F})|_{P_0} &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\phi_{S_x} + \phi_{S_{-x}} + \phi_{S_y} + \phi_{S_{-y}} + \phi_{S_z} + \phi_{S_{-z}}}{\Delta V} \\
 &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta z \rightarrow 0}} \frac{\phi_{S_x} + \phi_{S_{-x}} + \phi_{S_y} + \phi_{S_{-y}} + \phi_{S_z} + \phi_{S_{-z}}}{\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right) - P\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right)}{\Delta x} \\
 &\quad + \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{Q\left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0\right) - Q\left(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0\right)}{\Delta y} \\
 &\quad + \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{R\left(x_0, y_0, z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right) - R\left(x_0, y_0, z_0 - \frac{\Delta z}{2}\right)}{\Delta z} \\
 &= \frac{\partial P}{\partial x}(P_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(P_0) + \frac{\partial R}{\partial z}(P_0)
 \end{aligned}$$

Como esta igualdad vale para todo punto P_0 , finaliza la demostración.

Si se quiere conocer el flujo total que atraviesa una superficie cerrada, se debe integrar la $\operatorname{div}(\vec{F})$ a todo el sólido dando origen al Teorema de la Divergencia.

TEOREMA DE LA DIVERGENCIA O TEOREMA DE GAUSS

Sea $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ un campo vectorial cuyas componentes P , Q y R tienen derivadas parciales continuas; y sea S una superficie cerrada, regular a trozos y orientable que encierra un volumen V ; entonces

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{F}) dV$$

Este Teorema es muy importante y relaciona una Integral de Superficie de Campos Vectoriales con una Integral Triple.

Si se necesita calcular el flujo neto que atraviesa un sólido limitado por distintas superficies, se debe calcular el Flujo a través de cada superficie y luego sumar todos los flujos para calcular el Flujo Total. A veces es más sencillo aplicar el teorema y se resuelve con una sola integral triple.

Ejemplo: Aplicar el teorema para verificar el flujo hallado en el ejemplo anterior, en donde el campo viene dado por $\vec{F} = (x, y, z)$ y la superficie cerrada está conformada por $S_1: x^2 + y^2 = 4$, $S_2: z = 0$ y $S_3: z = 5$,

Como la superficie es cerrada, el flujo total se puede calcular directamente aplicando el Teorema de la Divergencia

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{F}) dV$$

Para hallar los límites de integración correspondientes al volumen V podemos usar coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad J = \rho \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 5 \end{matrix}$$

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\iiint_V \operatorname{div}(\vec{F}) dV = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho d\rho \int_0^5 3 dz = 60\pi$$

Precauciones:

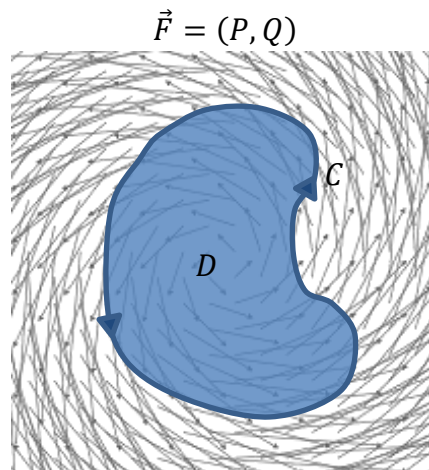
- a) El teorema de la divergencia se aplica solamente cuando la superficie es cerrada
- b) Se debe tomar siempre la normal saliente de la superficie

VECTOR ROTOR

El Teorema de Green nos dice que si $C \subset \mathbb{R}^2$ es una curva cerrada simple regular a trozos, positivamente orientada; D es la región interior encerrada por C ; y $\vec{F} = (P, Q) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un campo vectorial cuyas componentes P y Q tienen derivadas parciales continuas. Entonces

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Con el fin de extender este resultado a 3D, interpretemos físicamente la cantidad



$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

y veamos que esta cantidad cuantifica la capacidad rotacional de un campo bidimensional.

Uno de los ejemplos más simples de un campo vectorial que describe la rotación de un fluido es $\vec{F} = (-y, x)$, el cual representa un fluido moviéndose en círculos (ver Figura 12). Este campo intuitivamente tiene una gran capacidad rotacional en el sentido anti horario, pero necesitamos un índice que cuantifique esta característica.

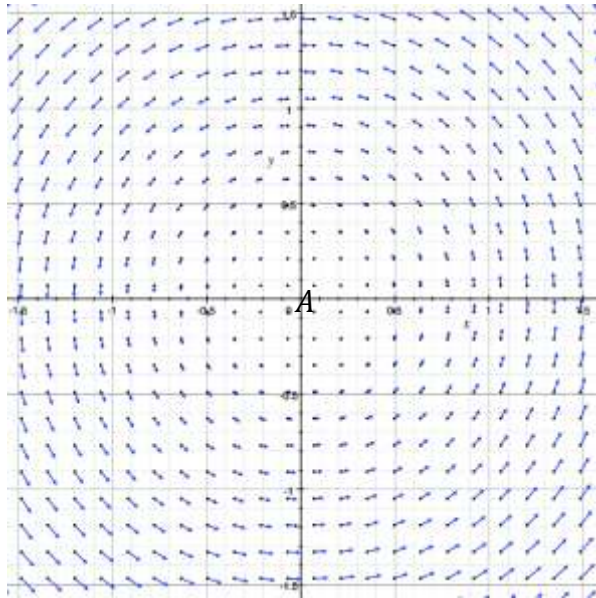


Figura 12

Si miramos sobre cualquier eje horizontal como por ejemplo el eje x , a medida que aumenta en valor de x es importante que aumente la componente Q del campo para generar los giros en el sentido anti horario. Luego es importante que $\frac{\partial Q}{\partial x}$ sea grande.

Por otro lado, si miramos sobre cualquier eje vertical como por ejemplo el eje y , a medida que aumenta en valor de y es importante que disminuya la componente P del campo para generar los giros buscados. Luego es importante que $-\frac{\partial P}{\partial y}$ sea grande.

Es por ello que se usa el índice $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ para cuantificar la capacidad rotacional de un campo bidimensional en el sentido anti horario.

Análogamente, si el campo fuese tridimensional de la forma $\vec{F} = (P, Q, 0)$ las conclusiones serían las mismas, pero podríamos hablar de rotaciones sobre planos paralelos al plano coordenado xy , o lo que es lo mismo, giros usando al eje z como eje de giro.

Para campos de la forma general $\vec{F} = (P, Q, R)$ también podemos hablar de capacidad rotacional alrededor de ejes paralelos a los ejes x e y . Estos conceptos son cuantificados por los índices $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}$ y $\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}$, respectivamente, y su deducción es análoga a la realizada anteriormente.

Con estos tres índices se puede conformar un vector denominado *vector rotor* del campo, el cual viene dado por

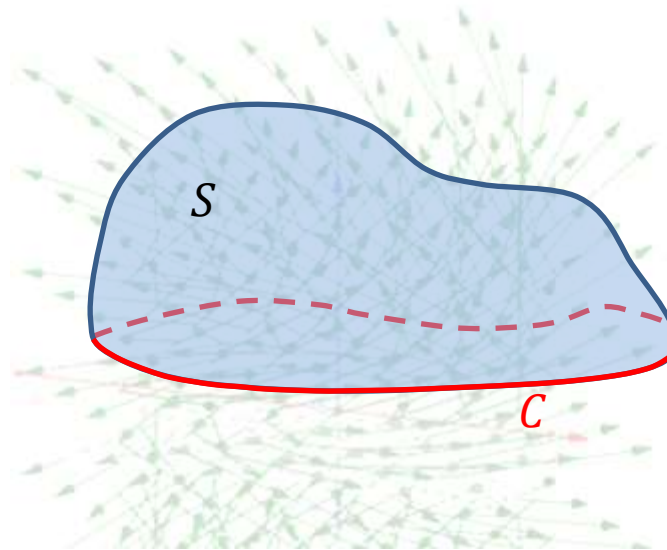
$$\overrightarrow{\text{rot}(\vec{F})} = \nabla \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Luego podemos generalizar el Teorema de Green a 3D con el siguiente resultado, el cual no probaremos porque escapa a los objetivos del curso

TEOREMA DEL ROTOR O DE STOKES

Sea $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ un campo vectorial cuyas componentes P , Q y R tienen derivadas parciales continuas en un dominio simplemente conexo D . Sea $S \subset D$ una superficie regular y orientable. Sea C el contorno de S una curva cerrada y regular a trozos. Entonces se cumple

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}(\vec{F})} d\vec{S} = \oint_C \vec{F} d\vec{r}$$



Observaciones:

- Si $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$ y S es una superficie contenida en el plano xy , entonces $\vec{N} = \vec{n} = (0, 0, 1)$, y por ende,

$$\overrightarrow{\text{rot}(\vec{F})} \cdot \vec{n} = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot (0, 0, 1) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

Esto muestra que el Teorema de Stokes generaliza al Teorema de Green.

- Si proyectamos el vector rotor sobre un vector unitario $\vec{n}$, esto es

$$\overrightarrow{\text{rot}(\vec{F})} \cdot \vec{n}$$

obtenemos la capacidad rotacional alrededor de un eje direccionado por tal vector. Si además, este vector $\vec{n}$ es normal a una superficie S en un punto P_0 , entonces $\overrightarrow{\text{rot}(\vec{F})} \cdot \vec{n}$ cuantifica la capacidad rotacional del campo sobre la superficie S alrededor de P_0 . Finalmente, si integramos este índice sobre la superficie S obtenemos un índice global de capacidad rotacional del campo sobre S . Toda esta información está resumida en la frontera C de la superficie S , y se puede calcular hallando la circulación del campo sobre C .

Ejemplo

Supongamos un canal de ancho a . El que ha tenido oportunidad de ver el movimiento del agua a lo largo de un canal habrá observado que en el medio la velocidad del agua es casi una constante V_0 , mientras que en las orillas la velocidad disminuye produciéndose pequeños remolinos.

Por este motivo, modelemos el campo de velocidades con (ver Figura 12)

$$\vec{F} = \left(0, V_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right), 0 \right)$$

El rotor ayuda a medir la capacidad de movimiento de rotación que genera el campo, y en este ejemplo viene dado por

$$\overrightarrow{\text{rot}(\vec{F})} = \left(0, 0, V_0 \frac{a}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \right)$$

Si se fija un molinillo en ambos lados se observa que éste gira en sentido contrario en ambos lados. Esta característica es diagramada por los vectores verdes en la Figura 13.

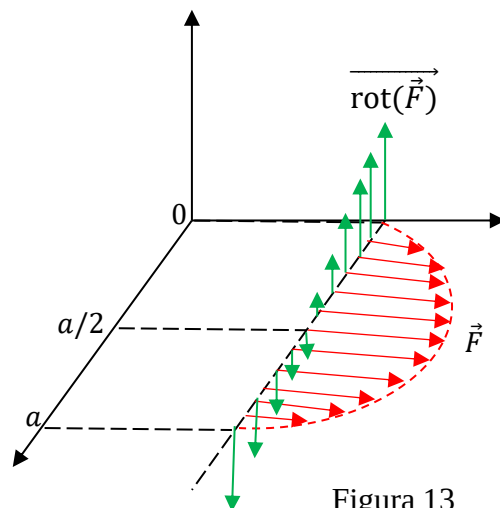


Figura 13

En la gráfica se puede observar como en las orillas el rotor tiene mayor módulo, pero de sentido contrario y en el centro es nula. Si unimos los extremos de los vectores se formará la función $\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)$ con amplitud $V_0 \frac{a}{\pi}$.

Ejemplo

Verificar el teorema de Stokes siendo $\vec{F} = (2z, x, y^2)$ y $S : z = 4 - x^2 - y^2$ limitada por $z = 0$.

Comencemos con la integral curvilínea: La curva C que es la frontera de la superficie S , es la circunferencia roja mostrada en la Figura 14, cuya parametrización viene dada por

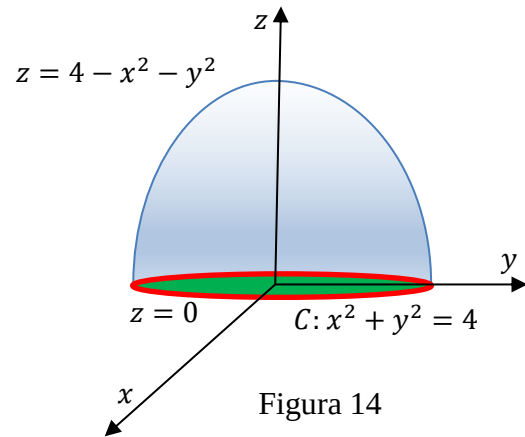


Figura 14

$$\begin{cases} x = 2 \cos(\theta) \\ y = 2 \sin(\theta) \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}'(\theta) = (-2 \sin(\theta), 2 \cos(\theta), 0) \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Luego

$$\vec{F}(\vec{r}(\theta)) = (0, 2 \cos(\theta), 4 \sin^2(\theta))$$

$$\vec{F}(\vec{r}(\theta)) \cdot \vec{r}'(\theta) = 4 \cos^2(\theta)$$

Y por lo tanto la circulación resulta ser

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} 4 \cos^2(\theta) d\theta = 2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\theta)) d\theta = 2 \left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 4\pi$$

Veamos ahora si la integral de superficie que plantea el Teorema de Stokes da el mismo resultado:

$$\overrightarrow{\text{rot}(\vec{F})} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z & x & y^2 \end{vmatrix} = (2y, 2, 1)$$

El paraboloide se parametriza con el auxilio de las coordenadas polares, debido que la proyección de la superficie sobre el plano $z = 0$ es un círculo de radio 2. Luego

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \\ z = 4 - \rho^2 \end{cases} \quad \vec{N} = \vec{r}_\rho \wedge \vec{r}_\theta = (2\rho^2 \cos(\theta), 2\rho^2 \sin(\theta), \rho) \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 2 \end{matrix}$$

El rotor expresado en las coordenadas elegidas será

$$\overrightarrow{\text{rot}(\vec{F})} = (2\rho \sin(\theta), 2, 1)$$

El producto escalar entre el rotor y el vector normal será

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}(\vec{F})} \cdot \vec{N} &= (2\rho \sin(\theta), 2, 1) \cdot (2\rho^2 \cos(\theta), 2\rho^2 \sin(\theta), \rho) \\ &= 4\rho^3 \sin(\theta) \cos(\theta) + 4\rho^2 \sin(\theta) + \rho \end{aligned}$$

Luego el flujo del rotor será

$$\begin{aligned} \iint_S \overrightarrow{\text{rot}(\vec{F})} \cdot d\vec{S} &= \iint_H \overrightarrow{\text{rot}(\vec{F}(\rho, \theta))} \cdot \vec{r}_\rho \wedge \vec{r}_\theta d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4\rho^3 \sin(\theta) \cos(\theta) + 4\rho^2 \sin(\theta) + \rho) d\rho d\theta = 4\pi \end{aligned}$$

El Teorema de Stokes no especifica una determinada superficie S , sino que sólo pide que el contorno de S sea C . Luego, se puede elegir calcular el flujo del rotor usando otra superficie S que tenga a C como contorno. Por ejemplo, se puede usar como superficie al círculo plano contenido en el plano $z = 0$ con borde en la misma curva C . En este caso, la superficie se parametriza con

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} -2 \leq x \leq 2 \\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \end{matrix}$$

y su vector normal es el vector $\vec{N} = (0, 0, 1)$. Luego

$$\overrightarrow{\text{rot}(\vec{F})} \cdot \vec{N} = (2y, 2, 1) \cdot (0, 0, 1) = 1$$

Entonces el flujo del rotor a través de la superficie del plano $z = 0$ limitado por el paraboloide será

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}(\vec{F})} \cdot d\vec{S} = \iint_H 1 dx dy = \text{Area}(H) = 4\pi$$

Como vemos da el mismo resultado calcular el flujo del rotor sobre el paraboloide que sobre el plano, porque ambas superficies tienen como borde la misma curva. Luego, si la curva C es intersección de dos superficies conviene tomar como superficie S la que sea más sencilla de trabajar.

Observaciones:

- Si el rotor de un Campo Vectorial es nulo (irrotacional: el campo es incapaz de producir movimientos de rotación), entonces el campo es gradiente o conservativo, ya que se verifican las igualdades requeridas entre las derivadas cruzadas de P , Q y R . Luego

$$\text{Si } \overrightarrow{\text{rot}(\vec{F})} = \vec{0} \Rightarrow \text{El campo es irrotacional} \Rightarrow \oint_C \vec{F} d\vec{r} = 0 \quad \forall C$$

$$\Rightarrow \exists \varphi \text{ tal que } \vec{F} = \overrightarrow{\nabla \varphi}$$