

CALCULO II

Ingeniería Mecánica Ingeniería Electromecánica

Equipo de Cátedra

Profesor Titular

Dr. Javier Gimenez

Profesor Adjunto

Dr. Emanuel Tello

Jefe de Trabajos Prácticos

Mg. Juan Pablo Llarena

AÑO 2024

INTEGRALES DE SUPERFICIES DE CAMPOS ESCALARES

INTRODUCCIÓN

Hasta ahora hemos estudiado como integrar:

- Sobre una región plana mediante integrales dobles

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

- Sobre un sólido mediante integrales triples

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

- Sobre una curva mediante integrales curvilíneas

$$\int_C f(x, y, z) ds \quad \text{o} \quad \int_C \vec{F} d\vec{r}$$

Ahora estudiaremos como integrar sobre una superficie en el espacio.

Con la integración de un Campo Escalar sobre una superficie vamos a calcular áreas, masa, centro de gravedad, y momentos de inercia de una lámina alabeada, entre otras aplicaciones.

Para ello trabajaremos en forma análoga a Integrales Curvilíneas comenzando por estudiar cómo representar en forma paramétrica una superficie.

REPRESENTACIÓN PARAMÉTRICA DE UNA SUPERFICIE

Hemos representado una curva en el plano o en el espacio mediante ecuaciones paramétricas, y a partir de ellas, construimos una función vectorial $\vec{r}(t)$ **dependiente de un solo parámetro**.

Análogamente aprenderemos a representar una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ en el espacio por ecuaciones paramétricas, y a partir de ellas, construiremos una función vectorial

$$\vec{r} : H \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{r}(u, v) = X(u, v)\hat{e}_1 + Y(u, v)\hat{e}_2 + Z(u, v)\hat{e}_3$$

dependiente de dos parámetros tal que $\vec{r}(H) = S$.

Asumiremos que $\vec{r}$ es diferenciable en cada una de sus componentes, y biyectiva entre H y S . Además, supondremos que S es una superficie regular, esto es, que $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ y $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ no se

anulan nunca, lo cual garantiza la existencia de un vector no nulo normal a la superficie en todo punto.

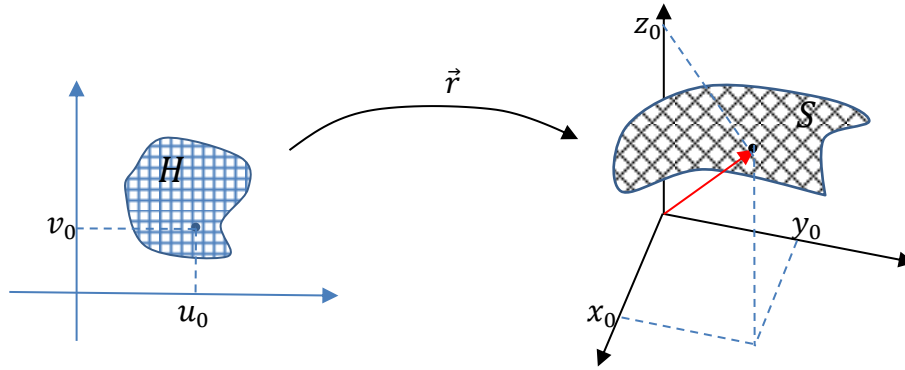


Figura 1

Nos proponemos ahora estimar el área de la superficie S , la cual denotaremos también con S por simplicidad.

Al igual que cuando calculamos la longitud de arco, para calcular el área de S , vamos a particionar al dominio H de su parametrización $\vec{r}$ en pequeños rectángulo (ver Figura 1) de área $\Delta A(H) = \Delta u \cdot \Delta v$ (ver Figura 2). La imagen de cada celda de esta partición conforma un trozo de superficie de área ΔS (ver Figura 2). Luego, la suma de todos los elementos de superficie formados resulta ser igual a S (área de la superficie S).

Nos proponemos aproximar cada ΔS para de este modo obtener una aproximación de S .

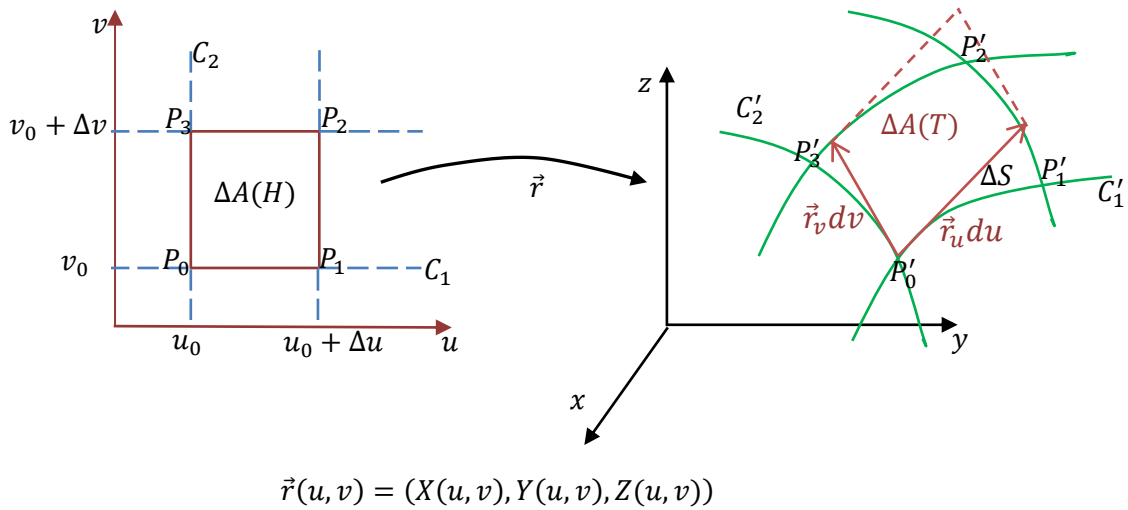


Figura 2

En la Figura 2 se definen:

$$P_0 = (u_0, v_0); \quad P_1 = (u_0 + \Delta u, v_0); \quad P_2 = (u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v); \quad P_3 = (u_0, v_0 + \Delta v)$$

$$\vec{r}(P_0) = P'_0; \quad \vec{r}(P_1) = P'_1; \quad \vec{r}(P_2) = P'_2; \quad \vec{r}(P_3) = P'_3$$

Se puede pensar que ΔS es una deformación del rectángulo plano $P_0P_1P_2P_3$ producido por $\vec{r}$.

$u = u_0$ constante origina $\vec{r}(u_0, v)$ que es la parametrización de la curva C'_2

$v = v_0$ constante origina $\vec{r}(u, v_0)$ que es la parametrización de la curva C'_1

Luego

$$\begin{aligned}\vec{r}(C_1) &= C'_1 & \vec{r}(C_2) &= C'_2 \\ \vec{P}'_2 - \vec{P}'_0 &= \vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0) = \Delta \vec{r} \end{aligned} \quad (1)$$

Como $\vec{r}$ es diferenciable,

$$\Delta \vec{r} \cong d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv$$

El desarrollo de Taylor para la función vectorial es igual que para campos escalares luego

$$\vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) \cong \vec{r}(u_0, v_0) + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv$$

En el caso que se incremente solo la variable u resulta

$$\vec{r}(u_0 + \Delta u, v_0) \cong \vec{r}(u_0, v_0) + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du$$

Luego reemplazando en (1) se tiene que para Δu lo suficientemente pequeño y $\Delta v = 0$,

$$\vec{P}'_1 - \vec{P}'_0 \cong \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du$$

Análogamente se procede para el otro arco de curva

$$\vec{P}'_3 - \vec{P}'_0 = \vec{r}(u_0, v_0 + \Delta v) - \vec{r}(u_0, v_0) \cong \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv$$

El rectángulo $P_0P_1P_2P_3$ por medio de $\vec{r}$ se transforma en el paralelogramo curvilíneo $P'_0P'_1P'_2P'_3$ (ver Figura 2), el cual se puede aproximar con el paralelogramo tangente T cuyos lados son

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du \quad \text{y} \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv \quad \text{esto es} \quad \Delta S \cong \Delta A(T)$$

Se sabe que el área del paralelogramo determinado por dos vectores es igual al módulo del producto vectorial entre ellos, luego se puede expresar

$$\Delta S \cong \|\vec{r}_u du \wedge \vec{r}_v dv\| = \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| du dv$$

Sumando sobre todos los elementos de superficie conformados se obtiene una aproximación de S , la cual se convierte en una identidad al hacer tender a cero Δu y Δv . Como sucede cada vez que definimos una integral, este límite de sumatorias se convierte en una integral, la cual en este caso viene dada por

$$S = \iint_H \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| du dv$$

A partir de esta identidad, surge la definición de diferencial de superficie dado por

$$dS = \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| du dv$$

Recordando: el producto vectorial de dos vectores tiene las siguientes propiedades:

$$\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v \begin{cases} \text{Dirección: es perpendicular al plano formado por los vectores} \\ \text{Módulo: es equivalente al área del paralelogramo formado por los vectores} \\ \text{Sentido: Regla de la mano derecha} \end{cases}$$

Como el paralelogramo T está formado por los vectores tangentes a las curvas, el producto vectorial de dichos vectores es un vector normal al plano del paralelogramo T , esto es, el vector $\vec{N} = \vec{r}_u \wedge \vec{r}_v$ conocido como vector normal fundamental, es normal a la superficie.

Conclusión:

$$dS = \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| du dv$$

$$\vec{N} = \vec{r}_u \wedge \vec{r}_v$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = \frac{\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\|} \quad \text{Vector Normal unitario}$$

Estas expresiones son muy importantes en el cálculo de Integrales de Superficies

Ejemplos de Parametrización de Superficies

- Consideremos la gráfica de una función diferenciable definida en forma explícita como $z = f(x, y)$, donde las variables independientes son x e y . Si la superficie es un plano o el dominio donde está definida es una región sencilla conviene elegir las coordenadas cartesianas cuyos parámetros son x e y . La parametrización será

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y) \end{cases} \Rightarrow \vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

$$\vec{N} = \vec{r}_x \wedge \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$$

Vector Normal que coincide con el vector normal visto en Campos Escalares en el tema de Plano Tangente.

2. La superficie es $S : ax + by + cz = d$

Es la superficie de un plano que se puede explicitar despejando z en función de x e y

$$z = f(x, y) = \frac{d - ax - by}{c}$$

Luego la parametrización es

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \frac{d - ax - by}{c} \end{cases} \quad \vec{r}(x, y) = \left(x, y, \frac{d - ax - by}{c} \right)$$

Teniendo en cuenta que :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-a}{c} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-b}{c}$$

$$\vec{N} = \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1 \right)$$

Que es equivalente al vector normal del plano que se obtiene en geometría como

$$\vec{N} = (a, b, c)$$

3. Parametrizar la porción de superficie $S_1 : z = x^2 + y^2$ limitado por $S_2 : z = 4$

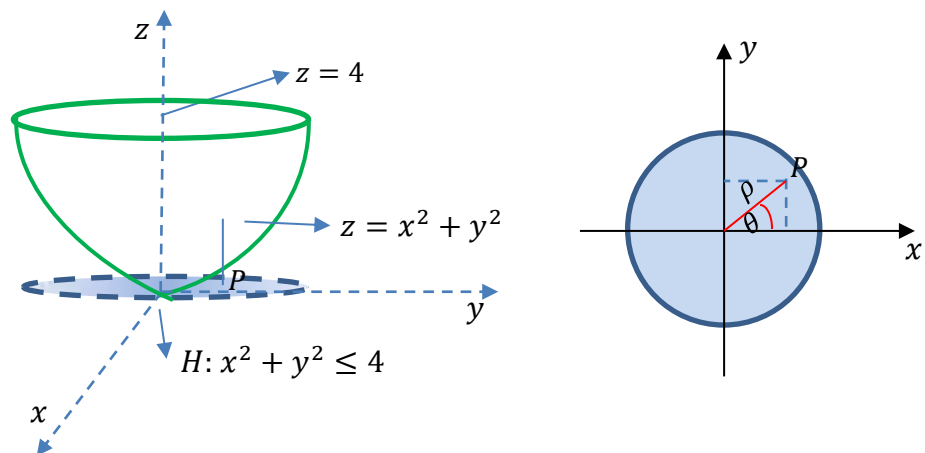


Figura 3

Puede ser que elija coordenadas cartesianas entonces la parametrización será

$$S_1: \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \quad \vec{N} = (-2x, -2y, 1)$$

$$S_2: \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 4 \end{cases} \quad \vec{N} = (0, 0, 1)$$

Si la superficie se proyecta sobre el plano xy se forma un círculo de radio 2 dado por $x^2 + y^2 \leq 4$. En sentido inverso, note que la superficie está conformada por los puntos del círculo elevados a una altura determinada por la función del paraboloide. Esto nos induce a pensar que las coordenadas del radio ρ y ángulo θ serán más sencillas para trabajar (ver Figura 3). Finalmente, el valor de z se obtiene reemplazando ρ y θ en $z = f(x, y)$.

Recuerden siempre que las superficies dependen de dos parámetros

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \\ z = \rho^2 \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 2 \end{matrix} \Rightarrow \vec{r}(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), \rho^2)$$

La expresión del vector normal es:

$$\vec{N} = \vec{r}_\rho \wedge \vec{r}_\theta = (-2\rho^2 \cos(\theta), -2\rho^2 \sin(\theta), \rho)$$

Se deja el cálculo para el alumno

4. Parametrizar la porción de superficie $S_1 : 25 = x^2 + y^2$ para $2 \leq z \leq 10$

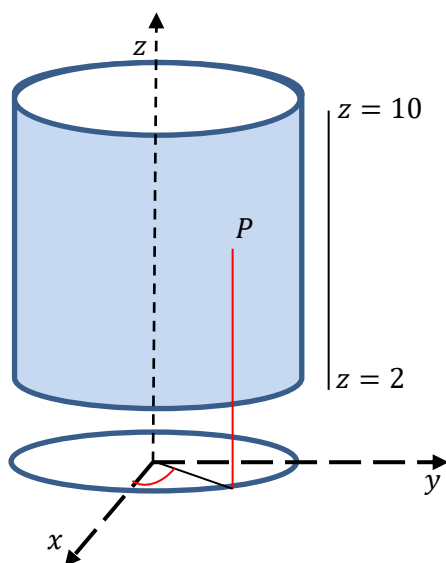


Figura 4

La superficie cilíndrica es la “cáscara”, por lo que si se proyecta sobre el plano xy , se forma una circunferencia de radio 5 sin sus puntos interiores. Luego, el radio es constante y los parámetros son la altura z y el ángulo θ . De este modo, la parametrización resulta ser:

$$\begin{cases} x = 5 \cos(\theta) \\ y = 5 \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 2 \leq z \leq 10 \end{matrix}$$

$$\vec{r}(\theta, z) = (5 \cos(\theta), 5 \sin(\theta), z)$$

$$\vec{N} = (-5 \cos(\theta), -5 \sin(\theta), 0)$$

(Ejercicio)

Si se considera la expresión demostrada anteriormente

$$dS = \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| du dv$$

Integrando a ambos miembros

$$S = \underbrace{\iint_S dS}_{\text{Int. de Superficie}} = \underbrace{\iint_H \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| du dv}_{\text{Integral doble}}$$

Esta expresión permite calcular el área de una superficie alabeada, donde el dominio de la parametrización es la región H .

Ejemplo 5

Hallar el área del paraboloide $S_1 : z = x^2 + y^2$ limitado por $z = 4$

En el Ejercicio 3 se analizó que el paraboloide se puede parametrizar en coordenadas cartesianas o con otras coordenadas como (ρ, θ) . Resolveremos de las dos formas

1) Usando coordenadas cartesianas.

$$S_1 \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \quad \vec{N} = (-2x, -2y, 1)$$

Se debe calcular el valor del módulo del vector Normal y determinar la región H que en este caso es la proyección de la superficie sobre el plano xy .

En la Figura 5 se puede observar que $H: x^2 + y^2 \leq 4$

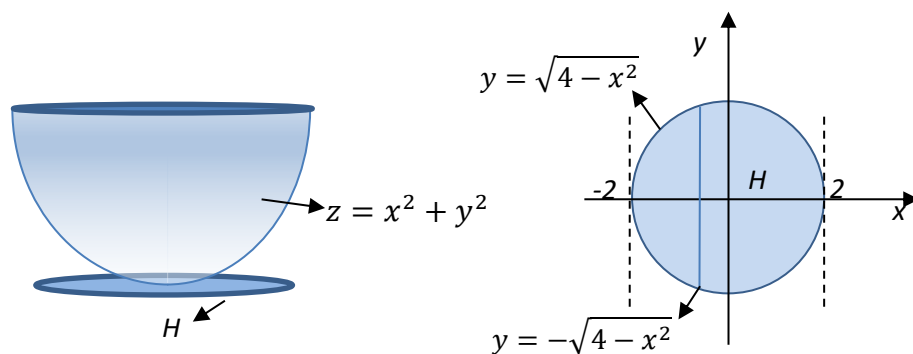


Figura 5

Para calcular el área se debe calcular la integral de superficie

$$S = \iint_S dS = \iint_H \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| du dv$$

donde

$$\vec{N} = \vec{r}_x \wedge \vec{r}_y = (-2x, -2y, 1) \quad \Rightarrow \quad \|\vec{N}\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$$

Los límites de integración son, considerando $x = \text{cte}$ según la Figura 5

$$\begin{aligned} -2 &\leq x \leq 2 \\ -\sqrt{4-x^2} &\leq y \leq \sqrt{4-x^2} \end{aligned}$$

$$S = \iint_S dS = \iint_H \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dy dx$$

Esta integral doble resulta muy complicada de resolver, por lo que se procede a hacer un cambio de variables como vimos al estudiar integrales dobles. De este modo, el integrando y los límites queden más sencillo. De acuerdo a lo visto usando coordenadas polares, la integral resulta:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos(\theta) & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y &= \rho \sin(\theta) & 0 \leq \rho \leq 2 \end{aligned} \quad J = \rho$$

Reemplazando el integrando con las coordenadas polares resulta

$$\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} = \sqrt{4\rho^2 \cos^2(\theta) + 4\rho^2 \sin^2(\theta) + 1} = \sqrt{4\rho^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho \sqrt{4\rho^2 + 1} d\rho d\theta & (A) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \underbrace{\rho}_{f'} \underbrace{(4\rho^2 + 1)^{1/2}}_{f^n} d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left. \frac{1}{12} (4\rho^2 + 1)^{3/2} \right|_0^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12} (17^{3/2} - 1) d\theta = \frac{17^{3/2} - 1}{6} \pi \end{aligned}$$

2) Usando otras coordenadas

Se puede plantear la integral usando directamente como parámetro las variables de las coordenadas polares ρ y θ para evitar hacer cambio de coordenadas cuando se resuelve la integral doble.

El paraboloide se parametriza como

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \\ z = \rho^2 \end{cases} \quad \begin{aligned} 0 &\leq \theta \leq 2\pi \\ 0 &\leq \rho \leq 2 \end{aligned} \quad \vec{r}(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), \rho^2)$$

La expresión del vector normal:

$$\vec{N} = \vec{r}_\rho \wedge \vec{r}_\theta = (-2\rho^2 \cos(\theta), -2\rho^2 \sin(\theta), \rho)$$

$$\|\vec{N}\| = \sqrt{4\rho^4 \cos^2(\theta) + 4\rho^4 \sin^2(\theta) + \rho^2} = \sqrt{4\rho^4 + \rho^2} = \rho\sqrt{4\rho^2 + 1}$$

Reemplazando en la integral queda

$$S = \iint_S dS = \iint_H \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| du dv = \int_0^{2\pi} \int_0^5 \rho\sqrt{4\rho^2 + 1} d\rho d\theta \quad (B)$$

Note que (A) y (B) son la misma integral, por lo que al resolver (B) se llega al mismo resultado, lo cual es lógico ya que el área es la misma.

Conclusión:

En 1) se resolvió en coordenadas cartesianas el ejercicio, resultando más sencillo encontrar el vector normal fundamental, sin embargo al final, llegamos a una integral doble compleja por los límites de integración. Para resolver esta integral doble se realiza cambio de coordenadas a polares (no olvidar incluir el Jacobiano en este paso) y así se puede resolver más fácilmente.

En b) se planteó el mismo problema, pero en coordenadas diferentes a las cartesianas, el cálculo del vector Normal es más laborioso, pero la integral queda más sencilla, resultando la misma integral que en 1) pero con la diferencia que no es necesario hacer cambio de coordenadas al resolver la integral doble.

No se debe confundir cambio de coordenadas con parametrización.

El Cambio de Coordenadas se realiza para resolver un integral doble o triple, cuando el integrando o los límites de integración son complicados.

La parametrización se aplica para resolver una integral de superficie usando dos parámetro o variables independientes:

- Si se realiza la parametrización en coordenadas cartesianas, se calcula el vector normal en forma más sencilla, pero “a veces” suele quedar la integral doble un poco complicada, entonces se recurre al cambio de coordenadas visto en integrales dobles donde deben expresarse los límites y el integrando en las nuevas coordenadas y además agregar el Jacobiano correspondiente.
- Por lo general cuando la proyección de la superficie sobre el plano xy es un círculo o circunferencia es conveniente utilizar desde el principio la parametrización eligiendo como parámetros ρ y θ .

INTEGRAL DE SUPERFICIE DE CAMPOS ESCALARES

DEFINICIÓN

Sea $w = f(x, y, z)$ un campo escalar continuo y acotado definido en un Dominio $D \subseteq \mathbb{R}^3$ y sea $S \subseteq D$ una superficie regular. Se define la integral de superficie de un campo escalar como

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_H f(\vec{r}(u, v)) \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| du dv$$

siendo $\vec{r}: H \rightarrow S$ dada por

$$\vec{r}(u, v) = X(u, v)\vec{i} + Y(u, v)\vec{j} + Z(u, v)\vec{k}$$

una parametrización de S , esto es: $\vec{r}(H) = S$.

APLICACIONES

1) Geométricas:

Si $f(x, y, z) = 1$ entonces $\iint_S dS$ es el área de la superficie S

2) Físicas: (Ídem a las definiciones para Integrales Múltiples)

Si $f(x, y, z) = \delta(x, y, z)$ es la densidad, entonces

a) Masa de una superficie:

$$M = \iint_S \delta(x, y, z) dS$$

b) Centro de Masa de la Superficie:

$$x_G = \frac{1}{M} \iint_S x \delta(x, y, z) dS$$

$$y_G = \frac{1}{M} \iint_S y \delta(x, y, z) dS$$

$$z_G = \frac{1}{M} \iint_S z \delta(x, y, z) dS$$

c) Momento de Inercia respecto a un eje:

$$I_{\text{eje}} = \iint_S d_{\text{eje}}^2(x, y, z) \delta(x, y, z) dS$$

donde $d_{\text{eje}}^2(x, y, z)$ es el cuadrado de la distancia desde cualquier punto $(x, y, z) \in S$ hasta el eje de rotación.

Ejemplo 6

Hallar la Masa de la superficie de forma cilíndrica de radio 3 y altura 10 sabiendo que la densidad es $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

a) Lo primero que se hace es la gráfica de la superficie (ver Figura 6)

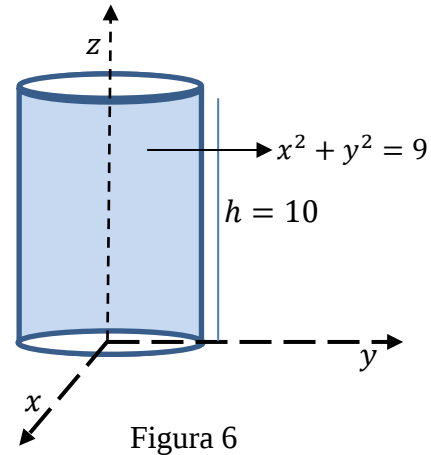


Figura 6

b) En el ejemplo 5 se estudió la superficie cilíndrica, su parametrización y el vector normal.

La expresión cartesiana de la superficie cilíndrica es $x^2 + y^2 = 9$, luego su parametrización es:

$$\begin{cases} x = 3 \cos(\theta) \\ y = 3 \sin(\theta) \\ z = z \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 10 \end{matrix} \quad \vec{r}(\theta, z) = (3 \cos(\theta), 3 \sin(\theta), z)$$

El vector normal es

$$\vec{r}_\theta \wedge \vec{r}_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 \sin(\theta) & 3 \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3 \cos(\theta), 3 \sin(\theta), 0)$$

$$\|\vec{r}_\theta \wedge \vec{r}_z\| = \sqrt{(3 \cos(\theta))^2 + (3 \sin(\theta))^2} = 3$$

c) La densidad expresada en la parametrización es:

$$\delta(\theta, z) = (3 \cos(\theta))^2 + (3 \sin(\theta))^2 + z^2 = 9 + z^2$$

d) El cálculo de la masa es

$$M = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS = \iint_H \underbrace{(9 + z^2)}_{\delta(\theta, z)} \underbrace{3}_{\|\vec{r}_\theta \wedge \vec{r}_z\|} d\theta dz$$

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{10} (27 + 3z^2) dz d\theta = \int_0^{2\pi} (27z + z^3) \Big|_0^{10} d\theta = \int_0^{2\pi} 1270 d\theta = 2540\pi$$