CALCULO II

Ingeniería Mecánica
Ingeniería Electromecánica

Equipo de Cátedra

Profesor Titular	Dr. Javier Gimenez
Profesor Adjunto	Dr. Emanuel Tello
Jefe de Trabajos Prácticos	Mg. Juan Pablo Llarena

AÑO 2024

ECUACIONES DIFERENCIALES

INTRODUCCIÓN

El Conocimiento de las Ecuaciones Diferenciales es esencial para entender importantes problemas físicos y matemáticos. Eso fue reconocido en el siglo XVII por Newton y usado por él en el estudio del movimiento de las partículas.

Las Ecuaciones Diferenciales se desarrollan como una rama de la Matemática Moderna en los siglos XIX y XX a través de notables matemáticos como Birkoff, Cauchy, Riemann, Picard, etc.

Las Ecuaciones Diferenciales son muy útiles para formular leyes que rigen fenómenos naturales mediante el lenguaje matemático, sobre todo las que describen fenómenos naturales vinculados con la rapidez de cambio, los cuales son expresados con mayor exactitud mediante derivadas. Veamos algunos ejemplos

Problema 1

Desde una cierta altura se arroja un cuerpo de masa m. Determinar la evolución de la velocidad $v(t)$ con la que cae si se desprecia la fuerza de rozamiento del aire, y el cuerpo inicialmente se encuentra en reposo.

Solución

Por la segunda ley de Newton sabemos que

$$m\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

donde las $\vec{F}_i$ son las fuerzas que actúan sobre la masa. En este caso, la única fuerza que actúa es la fuerza Peso, ya que se desprecia la fuerza de rozamiento. Entonces se cumple

$$m\frac{dv}{dt} = mg \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{v' = g} \qquad (1)$$

Integrando miembro a miembro (1) tenemos

$$v' = \frac{dv}{dt} = g \qquad \Longrightarrow \qquad dv = g\,dt \quad \Longrightarrow \quad \underline{v = gt + C_1} \qquad (2)$$

La ecuación (1) también puede expresarse en función del desplazamiento $x(t)$ como

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = g} \qquad (3)$$

Integrando dos veces resulta

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = \mathrm{gt} + \mathrm{C}_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \underline{x = g\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2} \qquad (4)$$

El dato de que la masa parte del reposo se expresa matemáticamente como

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v(0) = 0 \end{cases} \quad (5) \quad \Longrightarrow \quad C_1 = C_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{g}{2}t^2 & (6) \\ v = gt & (7) \end{cases}$$

Problema 2

En una habitación que se encuentra a 25ºC, la temperatura del agua baja de 100ºC a 80ºC en 10 minutos.

a) Hallar la temperatura del agua al cabo de 20 minutos.

b) ¿Cuándo la temperatura será de 40ºC?

Solución

Lo primero que se debe identificar es la variable independiente y la incógnita.

$T(t)$ es la temperatura del agua en cualquier instante t.

Por ejemplo, según los datos del problema, la temperatura inicial es

$$T(0) = 100^o C \qquad (8)$$

Además, luego de 10 minutos la temperatura es $80^o C$, esto es,

$$T(10) = 80^o C \qquad (9)$$

Por otro lado, en cada instante de tiempo t la diferencia de temperatura entre el agua y la habitación es $T(t) - 25^{\text{o}}$.

Experimentalmente se comprueba que la variación de temperatura del agua respecto del medio ambiente es proporcional a la diferencia de temperatura. Además, la constante de proporcionalidad es negativa porque la temperatura disminuye, o sea, es una función decreciente, y, por ende, su derivada es negativa:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 25)$$

$$T' = -k(T - 25) \qquad (10)$$

Note que en estas expresiones se escribió T en lugar de $T(t)$. Generalmente se realiza esta omisión para reducir notación, pero no olvide que T es una función temporal.

Luego

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 25)$$

$$\frac{dT}{T - 25} = -kdt$$

Integrando miembro a miembro se tiene

$$\int \frac{dT}{(T-25)} = \int -kdt$$

$$ln(T-25) = -kt + C$$

$$T - 25 = e^{-kt+C} = e^{-kt}\underbrace{e^{C}}_{c}$$

$$T = ce^{-kt} + 25 \qquad (11)$$

Para determinar la constante de integración c.

$$T(0) = 100 \qquad \Longrightarrow \qquad T(0) = c\,\underbrace{e^{-k0}}_{1} + 25 = 100 \qquad \Longrightarrow \qquad c = 75$$

$$T = 75e^{-kt} + 25 \qquad (12)$$

La constante $k > 0$ es una constante física propia del problema, esto es, no es una constante de integración como las que aparecen en (2) y (4). Para determinarla se usa la otra condición, o sea,

$$T(10) = 80 \qquad \Longrightarrow \qquad T(10) = 75e^{-k10} + 25 = 80$$

$$\Longrightarrow \qquad e^{-k10} = \frac{55}{75} = \frac{11}{15} \qquad \Longrightarrow \qquad e^{-k} = \left(\frac{11}{15}\right)^{1/10}$$

Reemplazando en (12) se tiene

$$T = 75\left(\frac{11}{15}\right)^{\frac{1}{10}t} + 25 \qquad (13)$$

<u>Observaciones:</u>

- Las expresiones (1), (3) y (10) son ecuaciones en las que aparecen respectivamente las funciones desconocidas v, x y T, con sus derivadas, y la variable independiente (la variable tiempo t en estos casos).
- En general, se utiliza la letra y para simbolizar a la función incógnita, y la letra x para simbolizar a la variable independiente, esto es, la incógnita es una función $y(x)$. Sin embargo, cuando dejamos atrás las expresiones abstractas, y planteamos una ecuación que modela un problema físico unidimensional, se utiliza la variable independiente temporal t, y la función incógnita cambia su denominación de acuerdo a la variable estudiada: temperatura T, velocidad v, posición x, etc.

- Estas ecuaciones reciben el nombre de Ecuaciones Diferenciales, y resolverlas implica hallar la función que verifica las respectivas identidades.

DEFINICIÓN DE ECUACIÓN DIFERENCIAL

Se llama Ecuación Diferencial (E.D.) a toda ecuación que establece una relación entre la **variable independiente**, **la función desconocida** y sus **derivadas**.

- Si la función desconocida depende sólo de una variable $y = y(x)$ entonces sus derivadas son derivadas totales; la ecuación se denomina **Ecuación Diferencial Ordinario (EDO)**; y se expresa de la siguiente manera

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = g(x)$$

- Si $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es función de n variables independientes, entonces aparecen derivadas parciales, y la ecuación se denomina **Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales (EDDP)**

En ambos casos se llama orden de la E.D. al mayor orden de derivación de la ecuación

En este curso sólo se estudiarán sólo las E. D. Ordinarias como las dadas en (1), (3) y (10), las cuales son de orden 1, 2 y 1, respectivamente.

TIPOS DE SOLUCIONES

- Se llama **Solución** de una E.D.O. a toda función que la verifique, o sea, que al reemplazar la función y sus derivadas en la E.D. se obtiene una identidad.
- Se define como **Solución General** de una EDO de orden n a una función $y(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ que depende de la variable independiente y de n constantes arbitrarias, y que verifica la ecuación diferencial.
- **Solución Particular** es toda aquella función que se obtiene de la Solución General dándole valores a todas las constantes. En general, estos valores se obtienen a partir de las Condiciones Iniciales o Condiciones de Contorno del problema planteado.
- Cuando existe sólo una combinación de valores para las constantes de la solución general que verifican la condición inicial o de contorno, se dice que la solución determinada por las constantes es la **Solución Única**.
- **Solución Singular** es una solución de la E.D. que no puede obtenerse a partir de la solución general.

Ejemplo: La EDO (1) tiene como solución general a (2), la cual depende de una constante arbitraria por ser (1) una EDO de orden 1. Además, (7) es solución particular de (1) ya que se obtiene considerar el valor $C_1 = 0$ en la solución general (2). Además, esta solución es una solución única porque no existe otro valor para C_1 que permita verificar la condición inicial $v(0) = 0$ dada en (5).

Ejemplo: La EDO (3) tiene como solución general a (4), la cual depende de dos constantes arbitrarias por ser (3) una EDO de orden 2. Además, (6) es solución particular de (3) ya que se obtiene considerar los valores $C_1 = C_2 = 0$ en la solución general (4). Además, esta solución es una solución única porque no existe otra combinación de valores para C_1 y C_2 que permita verificar las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ dadas en (5).

Ejemplo: La EDO (10) tiene como solución general a (11), la cual depende de sólo de la constante arbitraria c (recuerde que k es una constante física) por ser (10) una EDO de orden 1. Además, (12) es solución particular de (10) ya que se obtiene considerar el valor $c = 75$ en la solución general (11). Además, esta solución es una solución única porque no existe otro valor para c que permita verificar la condición inicial $T(0) = 100$ dada en (8). En este problema la solución (13) es la misma solución única dada en (12) pero con el parámetro físico k ya identificado.

Ejemplo: La ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$(y')^2 + xy' - y = 0 \qquad (14)$$

tiene por solución general a

$$y = Cx + C^2 \qquad (15)$$

Primero que nada, observe que la solución general depende de una sola constante arbitraria, y esto se debe a que es una EDO de primer orden. Ahora, para verificar que $y = Cx + C^2$ es realmente la solución general debemos reemplazarla en la ecuación y ver si la verifica.

$$\left.\begin{array}{c} y = Cx + C^2 \\ \Downarrow \\ y' = C \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rcc} {y'}^2 & = & C^2 \\ xy' & = & Cx \\ -y & = & -Cx - C^2 \\ \hline (y')^2 + xy' - y & = & 0 \end{array}$$

Se pueden determinar soluciones particulares dándole valores a C, como por ejemplo

C	Solución particular
1	$y = x + 1$
2	$y = 2x + 4$

Sin embargo, en la práctica se fijan condiciones iniciales, y a partir de ellas, se hallan las constantes que generan las soluciones particulares de interés. Por ejemplo, fijando la condición inicial

$$y(0) = 1 \qquad (16)$$

resulta

$$1 = y(0) \;\Rightarrow\; 1 = C.0 + C^2 = C^2 \;\Rightarrow\; C = \pm 1$$

Por lo tanto, las soluciones particulares que verifican la condición inicial $y(0) = 1$ son

$$y = -x + 1 \qquad , \qquad y = x + 1 \qquad (17)$$

Luego, no existe una solución única para la ED que satisfaga $y(0) = 1$.

Sin embargo, si existe una solución única para $y(0) = 0$, la cual es la función nula $y = 0$ correspondiente a la solución general con $C = 0$.

La Fig. 1 muestra en verde las gráficas de soluciones particulares para distintos valores de C.

Veamos ahora que

$$y = -\frac{x^2}{4} \qquad (18)$$

es solución singular de (14). En efecto:

$$\left.\begin{array}{c} y = -\dfrac{x^2}{4} \\ \Downarrow \\ y' = -\dfrac{x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} y'^2 & = & \dfrac{x^2}{4} \\ xy' & = & -\dfrac{x^2}{2} \\ -y & = & -\dfrac{x^2}{4} \\ \hline (y')^2 + xy' - y & = & 0 \end{array}$$

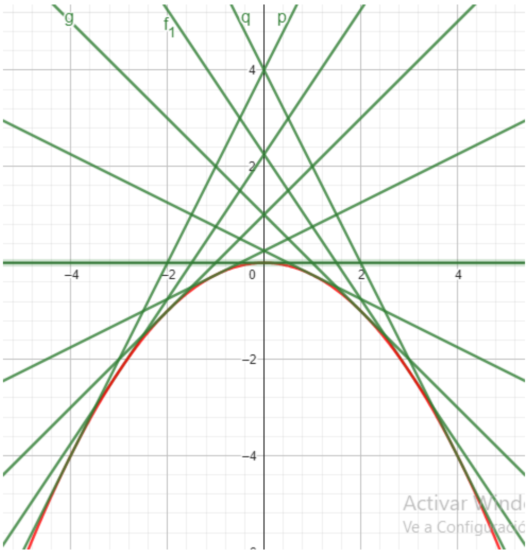


Figura 1

Esta solución no es una solución particular ya que no se obtiene a partir de reemplazar algún valor de C en la solución general, y por lo tanto, es una solución singular. En la Fig. 1 se grafica en rojo esta solución singular. Note que hay una relación envolvente entre las soluciones particulares y la solución singular.

PROBLEMA DE VALOR INICIAL

Un problema de valor inicial (PVI) es una EDO de orden n con n condiciones iniciales.

Ejemplos: Conforman problemas de valor inicial:

- La EDO (1) con la condición inicial $v(0) = 0$ dada en (5);
- La EDO (3) con las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ dadas en (5);
- La EDO (10) con la condición inicial $T(0) = 100$ dada en (8);
- La EDO (14) con la condición inicial $y(0) = 1$ dada en (16).

Interrogantes:

¿Todo PVI tiene solución? ¿Bajo qué condiciones existe esa solución? Si existe la solución ¿es única?

Note que salvo el último ejemplo, los demás PVI vistos tienen una única solución. El PVI formado por (14) y (16) tiene dos soluciones.

Todas estas preguntas se pueden responder con el Teorema de Existencia y Unicidad cuya demostración no es motivo de estudio en este curso.

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD

Dada la Ecuación Diferencial de Primer Orden $y' = f(x, y)$ con

a) f es real y continua

b) $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua

c) $y(x_0) = y_0$ (Condición Inicial)

Entonces existe una y solo una solución $y = y(x)$ del PVI.

Nota:

- La EDO (14) no se puede escribir de la forma $y' = f(x, y)$, y por ende, no es considerada por el Teorema de existencia y unicidad. Por ello es que no se halla una solución única.
- En la EDO (10) resulta que las funciones
$$f(t, T) = -k(T - 25)$$
$$\frac{\partial f}{\partial T} = -k$$
son continuas. Si se considera una condición inicial como (8), resulta una única solución para el correspondiente PVI.

Ejemplo: Hallar la solución general de la E.D. $y' - 2x = 0$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden cuya incógnita es la función $y = y(x)$ donde x es la variable independiente. Si se despeja la derivada se obtiene

$$y' = f(x, y) = 2x \qquad (19)$$

Geométricamente representa que en cada punto x, la curva de la función solución y tiene una recta tangente con pendiente igual a $2x$.

Por el Teorema de Existencia y Unicidad, como las funciones

$$f(x, y) = 2x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

son continuas, existe una única solución a la EDO que satisfaga cada posible condición inicial. Consideremos por ejemplo la C.I. dada por

$$y(1) = 2 \qquad (20)$$

Comencemos por hallar la solución general de (19) integrando miembro a miembro

$$\text{Solución General:} \qquad y = x^2 + C$$

Esta es una familia de curvas monoparamétrica (Fig. 2). Es una familia de parábolas con vértices a lo largo del eje y.

Para determinar una de ellas es necesario tener como dato un punto $P_0(x_0, y_0)$, o sea, una condición inicial $y(x_0) = y_0$ como la dada en (20), y así se determina la solución única del problema que pasa por $P_0(x_0, y_0)$.

Por ejemplo, para $P(1,2)$ la solución única se halla reemplazando este punto en la solución general, esto es:

$$2 = 1^2 + C \qquad \Longrightarrow \qquad C = 1$$

Entonces la parábola que pasa por el punto $P(1,2)$ es

$$y = x^2 + 1$$

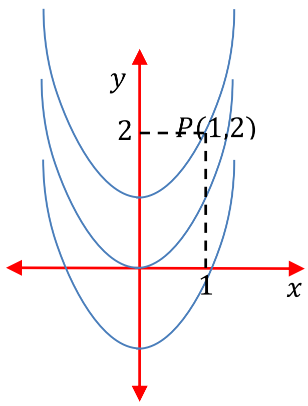


Figura 2

En general no se puede hallar la solución analíticamente y se debe recurrir a procedimientos numéricos. Sin embargo, en este curso se presentarán metodologías para resolver analíticamente determinadas familias de EDO.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Una E.D. puede expresarse de dos formas

$y' = f(x,y)$ Forma Explícita $\Longrightarrow$ solución general $y = y(x,C)$

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ Forma Implícita $\Longrightarrow$ solución general $u(x,y) = C$

Nota: El pasaje de una forma a la otra se hace teniendo en cuenta que $y' = \frac{dy}{dx}$

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y) \Longrightarrow \underbrace{f(x,y)}_{P(x,y)}dx + \underbrace{(-1)}_{Q(x,y)}dy = 0$$

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \Longrightarrow y' = f(x,y) = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

A continuación, estudiaremos algunos tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden para las que se cuenta con métodos de resolución analítico, y que aparecen frecuentemente en las aplicaciones

I. Método de Separación de Variables
II. Método de Diferencial Exacta
III. Método de Reducible a Diferencial Exacta
IV. Ecuación Diferencial Lineal de primer Orden

I. Método de Separación de Variables

Toda ecuación diferencial de primer orden que pueda explicitarse despejando y' tendrá la forma

$$y' = f(x,y)$$

Supongamos que $f(x,y)$ puede expresarse como producto o cociente de dos funciones de la forma

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)} \qquad \text{ó} \qquad y' = g(x)h(y)$$

Esto es, una función depende solamente de x y la otra solamente de y.

En este caso la E.D. se llama a variables separables y se resuelve de la siguiente manera. Consideremos sólo el caso del cociente, ya que el caso de producto es análogo. Además, en general, el producto puede ser escrito como cociente, y viceversa.
El diferencial de una función de una variable viene dado por

$$dy = y'(x)dx$$

Reemplazando la expresión de la derivada se tiene

$$dy = \frac{g(x)}{h(y)}dx$$

Expresando todo lo que depende de y en el miembro izquierdo de la igualdad se tiene

$$h(y)dy = g(x)dx$$

Integrando a ambos miembros respecto de la variable que se indica se obtiene

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx \qquad (21)$$

Como son integrales indefinidas se debe sumar una constante arbitraria al resolverlas. Asociando las constantes en un solo miembro se llega a la Solución General del problema.

Ejemplo: En el Problema 2 presentado al inicio, la ecuación (10) es la E.D. ordinaria

$$T' = -k(T-25) = \frac{-k}{\frac{1}{T-25}} = \frac{g(t)}{h(T)}$$

Donde $g(t) = -k$, $h(T) = \frac{1}{T-25}$. Luego esto se puede expresar en variables separables. Cuando resolvimos esta EDO llegamos a una expresión equivalente a (21) dada por

$$\int \frac{1}{T-25}dT = \int -kdt$$

Para luego llegar a la solución general dada en (11). Sin darnos cuenta, en aquel entonces, resolvimos la EDO aplicando el método de variables separables.

II. Método de Diferencial Exacta

Consideremos una función $y = y(x)$ definida en forma implícita como $u(x, y) = C$. Luego

$$du = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}dy = 0 \qquad (22)$$

Esta expresión es una ED de la forma

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (23)$$

Inversamente, no toda ecuación de la forma (23) puede ser escrita como en (22), esto es, como el diferencial de una función u igualado a 0.

Una ecuación diferencial dada de la forma implícita (5) es una **Ecuación Diferencial Exacta** en una región $\mathcal{R}$ del plano xy si se puede expresar como en (4), esto es, si existe una función $u(x, y)$ tal que

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad y \qquad Q = \frac{\partial u}{\partial y}$$

En tal caso, la solución general es

$$u\,(x, y) = C \qquad (24)$$

En algunos casos es posible despejar la variable y para obtener la solución escrita de forma explícita $y = y(x)$.

Una condición suficiente para que una ED de la forma (5) sea de diferencial exacta es que $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ sean continuas con derivadas parciales continuas, y que se verifique

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (25)$$

Nota: Para resolver EDOs de primer orden con el método de Diferencial Exacta, NO es necesario verificar si el dominio es simplemente conexo ya que la condición de exactitud de una EDO es puntual, y por ende podemos encontrar una función potencial localmente, independientemente de la topología del dominio. La condición de que el Dominio sea simplemente conexo es necesaria como propiedad global para asegurar por ejemplo que las integrales sobre curvas cerradas sean cero.

De (25), resulta que existe una función potencial $\varphi(x, y) = C$ tal que $\vec{F} = \nabla\varphi$. En este caso $\varphi(x, y) = u(x, y)$ y la solución del problema es $\varphi(x, y) = C$.
Esto significa que

$$\vec{F} = \overrightarrow{\nabla u} \quad \Longrightarrow \quad P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad y \qquad Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Para calcular la solución de una E.D. exacta se procede igual que para Campos Gradientes al hallar la *función potencial* asociada al *campo vectorial* formado por

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \quad \Longrightarrow \quad u(x,y) = \int P(x,y)dx + f_1(y) \qquad (26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) \quad \Longrightarrow \quad u(x,y) = \int Q(x,y)dy + f_2(x) \qquad (27)$$

Como la solución es única, de (26) y (27) se forma la función $u(x,y)$ con los términos comunes y no comunes. Una vez obtenida la función potencial se iguala a una constante.

Ejemplo: Hallar la solución de $\underbrace{y^3}_{P(x,y)} dx + \underbrace{3xy^2}_{Q(x,y)} dy = 0$

Solución

a) Verificar si es Exacta: Tanto las funciones P y Q como sus derivadas son continuas. Además

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

b) Si se cumple a), se construye el campo vectorial

$$\vec{F} = \big(P(x,y), Q(x,y)\big) = \overrightarrow{\nabla u}$$

Luego, usando (26) y (27), se procede a calcular la función potencial asociada $u(x,y)$

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + f_1(y) = \int y^3 dx + f_1(y)$$

$$u(x,y) = y^3 x + f_1(y) \qquad (28)$$

$$u(x,y) = \int Q(x,y)dy + f_2(x) = \int \underbrace{3xy^2}\, dy + f_2(x)$$

$$u(x,y) = y^3 x + f_2(x) \qquad (29)$$

De (28) y (29) se obtiene la solución general

$$y^3 x = C$$

La cual se puede escribir de forma explícita como

$$y = \frac{c}{\sqrt[3]{x}}$$

III. Ecuación Diferencial Reducible a Exacta

En el caso que no sea Exacta, se puede reducir a exacta multiplicando por un factor llamado Factor Integrante, que transforma la E.D. dada en Diferencial Exacta.

Existen E.D. expresadas en forma implícita $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ que no sos E.D. exactas, pero que si se las multiplica por un Factor Integrante $\lambda(x,y)$ se convierten en exactas de la forma

$$\underbrace{\lambda(x,y)P(x,y)}_{P^*(x,y)=u_x(x,y)}dx + \underbrace{\lambda(x,y)Q(x,y)}_{Q^*(x,y)=u_y(x,y)}dy = 0$$

El Factor Integrante es desconocido y debe hallarse. Por el momento sólo sabemos que por (25) se debe verificar

$$\frac{\partial P^*}{\partial y} = \frac{\partial Q^*}{\partial x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial(\lambda P)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda Q)}{\partial x} \quad (30)$$

En general, es difícil hallar el factor integrante que verifique esta igualdad, por lo que sólo analizaremos los casos en los que $\lambda = \lambda(x)$ es sólo función de x, o $\lambda = \lambda(y)$ es sólo función de y. En el caso que $\lambda(x,y) = \text{cte}$ estamos en el caso de diferencial exacta.

1. Factor Integrante función sólo de x

   Supongamos que $\lambda = \lambda(x)$, luego es constante para y, y la derivada de λ respecto de x es una derivada total, por lo que la denotaremos con λ'. De (30) resulta

$$\frac{\partial(\lambda P)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda Q)}{\partial x}$$

$$\lambda\frac{\partial P}{\partial y} = \lambda' Q + \lambda\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\lambda\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \lambda' Q$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{P_y - Q_x}{Q} \qquad (31)$$

   El miembro izquierdo es una función que depende solamente de x, por lo que el miembro derecho debe ser una función sólo de x, esto es

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = h_1(x) \qquad (32)$$

   De no ser así, no se puede aplicar el método suponiendo que λ es función sólo de x. Por lo que se debe probar con λ siendo función sólo de y, aunque puede que tampoco se pueda y se deba buscar otra metodología.

   En caso que se verifique (32), resulta

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = h_1(x)$$

   Integrando miembro a miembro

$$\ln(\lambda) = \int h_1(x)dx$$

Despejando λ se obtiene

$$\lambda = \lambda(x) = e^{\int h_1(x)dx}$$

Conclusión:

$$\text{Si} \quad \frac{P_y - Q_x}{Q} = h_1(x) \quad \text{entonces}$$

$$\boxed{\lambda(x) = e^{\int h_1(x)dx}} \qquad (33)$$

2. Factor Integrante función sólo de y

   Si $\lambda = \lambda(y)$ entonces es constante para x, y la derivada de λ respecto de y es una derivada total que denotaremos con λ'.

   Para este caso particular (30) se reduce a

$$\frac{\partial(\lambda P)}{\partial y} = \frac{\partial(\lambda Q)}{\partial x}$$

$$\lambda' P + \lambda \frac{\partial P}{\partial y} = \lambda \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{Q_x - P_y}{P} \qquad (34)$$

El miembro izquierdo es una función que depende solamente de y, por lo que el miembro derecho debe ser una función sólo de y, esto es

$$\frac{Q_x - P_y}{P} = h_2(y) \qquad (35)$$

De no ser así, no se puede aplicar el método suponiendo que λ es función sólo de y. Por lo que si ya se probó con λ siendo función sólo de x, debe buscar otra metodología para resolver la ED.

En caso que se verifique (35), se lo reemplaza en (34), y resulta

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = h_2(y)$$

Integrando miembro a miembro

$$\ln(\lambda) = \int h_2(y)dy$$

Conclusión:

$$\text{Si} \quad \frac{Q_x - P_y}{P} = h_2(y) \quad \text{entonces}$$

$$\boxed{\lambda(y) = e^{\int h_2(y)dy}} \qquad (36)$$

De esta manera se calculan los factores integrantes, luego se multiplica la E.D. original a ambos miembros por uno de ellos, y de esa manera se transforma la E.D. en Diferencial Exacta. El resto consiste en calcular la función potencial asociada que, al igualarla a una constante, resultará la solución general buscada.

Ejemplo: Resolver

$$\begin{cases}(x-y)dx - dy = 0 \\ y(0) = 2\end{cases}$$

Solución

a) Primero se verifica si es diferencial exacta, para ello se deben calcular las derivadas cruzadas

$$P(x,y) = x - y \qquad\qquad Q(x,y) = -1$$

$$P_y = -1 \qquad \neq \qquad Q_x = 0$$

Luego no es Diferencial Exacta

b) Verifico si se puede usar $\lambda = \lambda(x)$ o $\lambda = \lambda(y)$:

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{-1}{-1} = 1 = h_1(x)$$

$$\frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{0-(-1)}{x-y} = \frac{1}{x-y} \neq h_2(y)$$

Luego sólo se puede usar $\lambda = \lambda(x)$.

c) Cálculo del factor integrante: De (33) resulta

$$\lambda(x) = e^{\int h_1(x)dx} = e^{\int dx} = e^x$$

d) Multiplicando ambos miembros de la Ecuación Diferencial Original por $\lambda(x)$ resulta

$$\underbrace{e^x(x-y)}_{P^*}dx \underbrace{-e^x}_{Q^*}dy = 0$$

Para saber que hemos trabajado bien se debe verificar que la nueva Ecuación Diferencial es exacta

$$P^*{}_y = -e^x \qquad = \qquad Q^*{}_x = -e^x$$

Ahora sí es diferencial exacta.

e) Se debe proceder a buscar la función potencial asociada.

$$u_x = e^x(x-y) \qquad \Longrightarrow \qquad u(x,y) = \int e^x(x-y)dx + f_1(y)$$

$$u(x,y) = xe^x - e^x \underline{-ye^x} + f_1(y)$$

$$u_y = -e^x \qquad \Longrightarrow \qquad u(x,y) = \int -e^x dy + f_2(x)$$

$$u(x,y) = \underline{-ye^x}$$

Luego la solución general será, los términos comunes una sola vez y los no comunes

$$u(x,y) = xe^x - e^x - ye^x + C_1$$

La solución general entonces viene dada por $u(x,y) = C_2$, o equivalentemente

$$xe^x - e^x - ye^x = C \qquad (37)$$

donde la constante C absorbe las constantes C_1 y C_2.

Esta solución también se puede expresar de forma explícita como

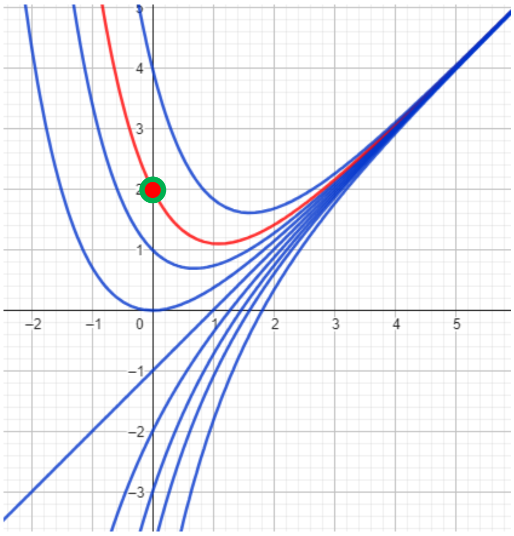
$$y = ce^{-x} + x - 1$$

f) Hallar la solución única usando la condición inicial $y(0) = 2$. Reemplazando en la solución general (37) resulta $C = -3$. Por lo que la solución única del problema es

$$xe^x - e^x - ye^x + 3 = 0$$

o en forma explícita

$$y = 3e^{-x} + x - 1$$



IV. Método para Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden

Cualquier ecuación diferencial lineal de primer orden se puede escribir de la siguiente forma

$$y' + p(x)y = f(x) \qquad (38)$$

Es una ecuación diferencial lineal de primer orden porque la máxima potencia de la función y el mayor orden de derivación es uno. Además, tiene coeficientes variables.

Se podría pensar que es reducible a exacta, luego se puede expresar en forma implícita

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$$

$$\underbrace{\big(yp(x) - f(x)\big)}_{P(x,y)} dx + \underbrace{1}_{Q(x,y)} dy = 0 \qquad (39)$$

Se prueba si existe el factor integrante que depende sólo de x

$$P(x,y) = yp(x) - f(x) \qquad\qquad P_y = p(x)$$

$$Q(x,y) = 1 \qquad\qquad Q_x = 0$$

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = p(x)$$

Luego el factor integrante es

$$\lambda(x) = e^{\int p(x)dx} \qquad (40)$$

Ahora deberíamos multiplicar miembro a miembro (39), pero lo haremos con la ecuación original (38) ya que es equivalente.

$$y' e^{\int p(x)dx} + p(x) y e^{\int p(x)dx} = f(x) e^{\int p(x)dx}$$

El primer miembro es la derivada del producto entre y y $e^{\int p(x)dx}$

$$\left(y e^{\int p(x)dx}\right)' = f(x) e^{\int p(x)dx}$$

Integrando miembro a miembro

$$y e^{\int p(x)dx} = \int f(x) e^{\int p(x)dx}\, dx$$

Despejando y, la Solución General resulta ser

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int f(x) e^{\int p(x)dx}\, dx + C\right] \qquad (35)$$

Ejemplo: Resolver la ecuación diferencial lineal de primer dada por

$$y' + y \operatorname{cotg} x = \cos x$$

Solución:

$$p(x) = \operatorname{cotg} x \qquad \Longrightarrow \qquad \int p(x)dx = \int \operatorname{cotg} x\, dx = \ln(\operatorname{sen} x)$$

$$\Longrightarrow \qquad \lambda(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\ln(\operatorname{sen} x)} = \operatorname{sen} x$$

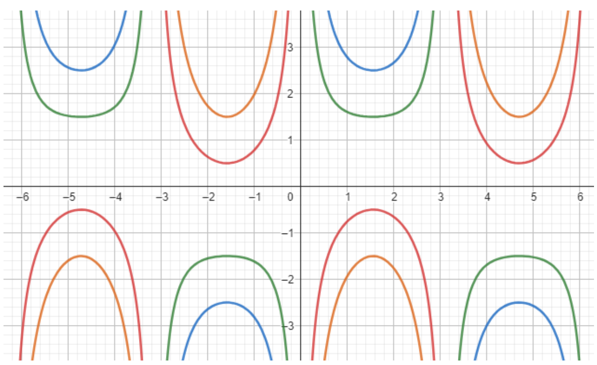
Luego, de (35) la solución general será

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int f(x) e^{\int p(x)dx}\, dx + C\right]$$

$$y = e^{\ln(\operatorname{sen} x)^{-1}}\left[\int \cos x \operatorname{sen} x\, dx + C\right]$$

$$y = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C\right)$$

$$y = \frac{\operatorname{sen} x}{2} + \frac{C}{\operatorname{sen} x}$$



Ejemplo: Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (1,0) y tiene como ecuación diferencial asociada

$$x^2y' + x(x+2)y = e^{-x}$$

Solución:

Lo primero que se debe hacer es verificar si se puede resolver por el método de variable separable. En caso que no sea posible, analizar si tiene la forma de diferencial exacta o reducible exacta. Para ello debe estar igualada a cero o llevarla a la expresión de diferencial exacta. Si no está igualada a cero, ver si responde a la estructura de lineal de primer orden.

En este ejemplo no se pueden separar las variables, porque al despejar y' no queda el producto o cociente de dos funciones una de x y otra de y.

$$y' = \frac{e^{-x} - x(x+2)y}{x^2}$$

Aunque se distribuya el denominador queda la diferencia de dos funciones que no pueden expresarse como el producto o cociente entre $h(x)$ y $g(y)$.

Si observamos la expresión original, dejando y' con coeficiente igual a uno se tiene

$$x^2y' + x(x+2)y = e^{-x}$$

$$\frac{x^2y'}{x^2} + \frac{x(x+2)}{x^2}y = \frac{e^{-x}}{x^2}$$

$$y' + \underbrace{\frac{x+2}{x}}_{p(x)}y = \underbrace{\frac{e^{-x}}{x^2}}_{f(x)}$$

Se puede observar que tiene la estructura de la ecuación lineal de primer orden. Es importante identificar las funciones $p(x)$ y $f(x)$ para poder hallar la solución

a) Primero se encuentra el factor $\lambda(x) = e^{\int p(x)dx}$. Para ello se puede calcular primero

$$\int p(x)dx = \int \frac{x+2}{x}dx = \int \left(1 + \frac{2}{x}\right)dx = x + 2\ln(x)$$

Luego

$$\lambda(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{x+\ln(x^2)} = e^x e^{\ln(x^2)} = x^2 e^x$$

Reemplazando en (35), resulta

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int f(x)e^{\int p(x)dx}\,dx + C\right]$$

$$y = (x^2e^x)^{-1}\left[\int \frac{e^{-x}}{x^2}x^2e^x dx + C\right]$$

$$y = \frac{e^{-x}}{x^2}\left[\int dx + C\right]$$

$$y = \frac{x + C}{x^2e^x}$$

la cual es la Solución General.

Para determinar la curva que pasa por el punto dado (1,0) se reemplaza en la solución general para determinar el valor de la constante.

$$0 = \frac{1 + C}{1^2e^1} = \frac{1 + C}{e}$$

Esta igualdad sólo es válida para $C = -1$. Luego la solución única viene dada por

$$y = \frac{x - 1}{x^2e^x}$$