CALCULO II

Ingeniería Mecánica
Ingeniería Electromecánica

Equipo de Cátedra

Profesor Titular	Dr. Javier Gimenez
Profesor Adjunto	Dr. Emanuel Tello
Jefe de Trabajos Prácticos	Mg. Juan Pablo Llarena

AÑO 2024

INTEGRALES TRIPLES

La integral triple es una extensión de la integral doble en donde el dominio de integración es un sólido de volumen V, es decir, una región contenida en el espacio. En este caso hay tres variables independientes y se simboliza como

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz$$

El volumen V es del sólido determinado por dos o más superficies de $\mathbb{R}^3$ como por ejemplo

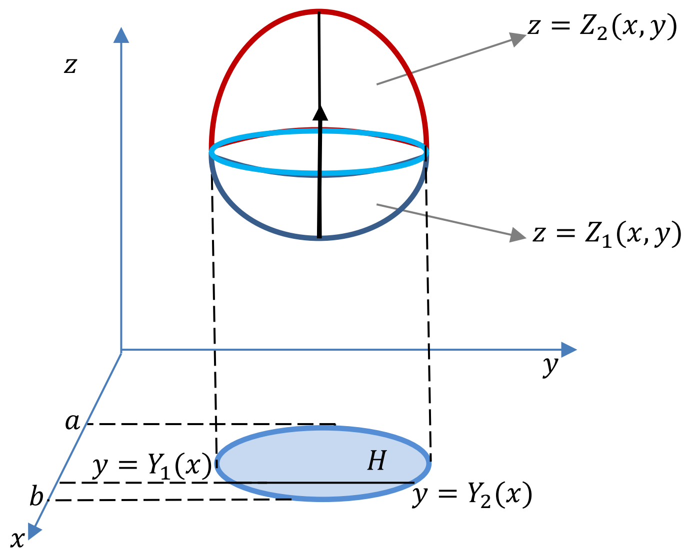


Figura 1

En la Figura 1 se puede observar como al trazar un rayo paralelo al eje z se ingresa al sólido por la superficie $Z_1(x, y)$ y se sale por la superficie $Z_2(x, y)$. Al proyectar el sólido sobre el plano xy se obtiene una región plana H que determina los límites de x e y. Luego, se procede de la misma forma que con integrales doble considerando una de las variables constante. En este caso en la Figura 1 se trazan rectas paralelas al eje y de ecuación $x =$cte. Se observa cuales son el máximo o mínimo valor de x que dejan a la región H totalmente contenida y se determinan los límites de y, los cuales son las curvas que delimitan la región H y que indican el mínimo y el máximo valor de y para cada x. Resultando que los límites de integración son:

$$a \leq x \leq b$$

$$Y_1(x) \leq y \leq Y_2(x)$$

$$Z_1(x, y) \leq z \leq Z_2(x, y)$$

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \int_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} \int_{Z_1(x,y)}^{Z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,dy\,dx$$

Nota: Si $f(x,y,z)$ es igual a 1 entonces el resultado de la integral es el valor del volumen del sólido, esto es:

$$V = \iiint_V dxdydz$$

Luego, el volumen del sólido se puede calcular de dos maneras:

a) mediante una integral triple
b) mediante una integral doble siendo el integrando la altura del sólido (techo menos piso).

Para el caso de la Figura 1 si se quiere el volumen se puede calcular de las dos formas siguientes y dan el mismo resultado:

a) $V = \iiint_V dxdydz = \int_a^b \int_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} \int_{Z_1(x,y)}^{Z_2(x,y)} dz\,dx\,dy$

b) $V = \iint_H \underbrace{(Z_2(x,y) - Z_1(x,y))}_{\text{techo} - \text{piso}} dxdy = \int_a^b \int_{Y_1(x)}^{Y_2(x)} (Z_2(x,y) - Z_1(x,y))dx\,dy$

Ejemplo 1

Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies $S_1: x+y+z=1$; $S_2: x=0$; $S_3: y=0$; y $S_4: z=0$ mediante una integral triple.

Solución:

Cuando se resuelve una integral triple es necesario hacer un bosquejo del gráfico de la región a integrar, luego graficar su proyección sobre el plano xy, o sobre el plano coordenado que resulte más sencillo para calcular, y así determinar la base del sólido. Luego, con un rayo vertical paralelo al eje z se analizan los límites de las superficies entre las que varía el sólido. Se deben cumplir los siguientes pasos

a) Representar gráficamente
b) Establecer los límites
c) Resolver la integral

a) Gráfico de la Región:
En la Figura 2 siguiendo "el rayo" se ingresa inferiormente al sólido por la superficie $S_4: z=0$ y se sale por la superficie $S_1: z = 1-x-y$.
Al proyectar el sólido sobre el plano xy queda grabada la superficie triangular de la Figura 3 donde el lado intersección del plano $z=1-x-y$ con $z=0$ es la recta $0 = 1-x-y$ que será uno de los lados del triángulo.

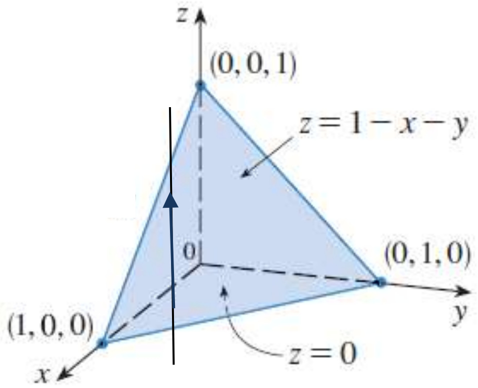


Figura 2: Gráfica del sólido

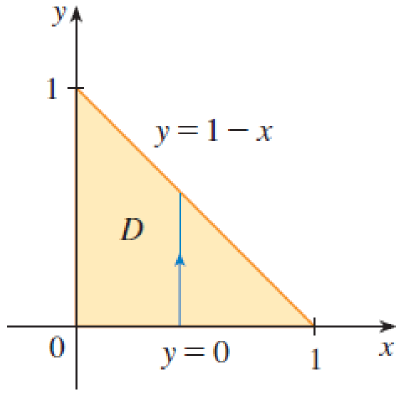


Figura 3: Proyección sobre xy

Luego observando las gráficas se pueden determinar los límites

b) Límites

$$0 \leq x \leq 1$$
$$0 \leq y \leq 1 - x$$
$$0 \leq z \leq 1 - x - y$$

c) Volumen es :

$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} z \Big|_0^{1-x-y} dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy = \int_0^1 dx \left(y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x}$$

$$= \int_0^1 \left(1 - x - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) dx = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{1}{2}x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

Ejemplo2

Hallar el volumen del sólido limitado por las superficies $S_1 : z = x^2$, $S_2 : z = 1$ y los planos $y = 0$ e $y = 1$

<u>Solución:</u>

La superficie $z = x^2$ es un cilindro (falta una variable) parabólico y el plano $z = 1$ es paralelo al plano xy.

a) Gráfica de la región

La intersección entre el cilindro parabólico y el plano (ver Figura 4) permite calcular los valores máximos y mínimos de x

$$\begin{cases} z = x^2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

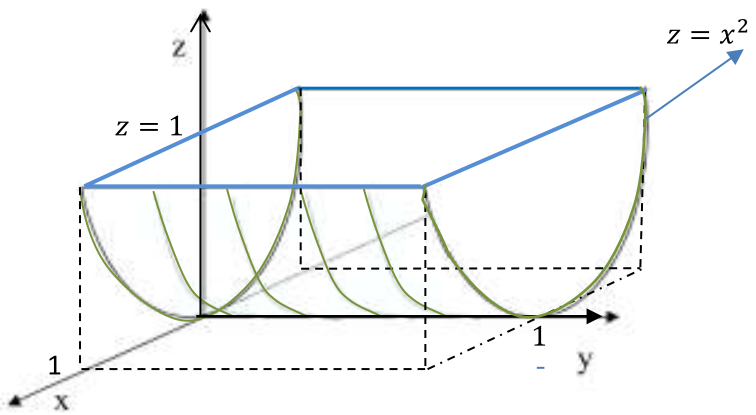


Figura 4

Además, los valores de y varían entre los planos verticales $y = 0$ e $y = 1$. Luego los límites resultan:

$$-1 \leq x \leq 1$$
$$0 \leq y \leq 1$$
$$x^2 \leq z \leq 1$$

b) Cálculo de la integral

$$V = \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{1} dy \int_{x^2}^{1} dz = \cdots = \frac{4}{3}$$

Se propone como ejercicio resolver la integral

Ejemplo 3:

Sea el sólido limitado por S_1: $x^2 + y^2 = 4$, S_2: $z = 1$ y S_3 : $z = 6$

a) Graficar

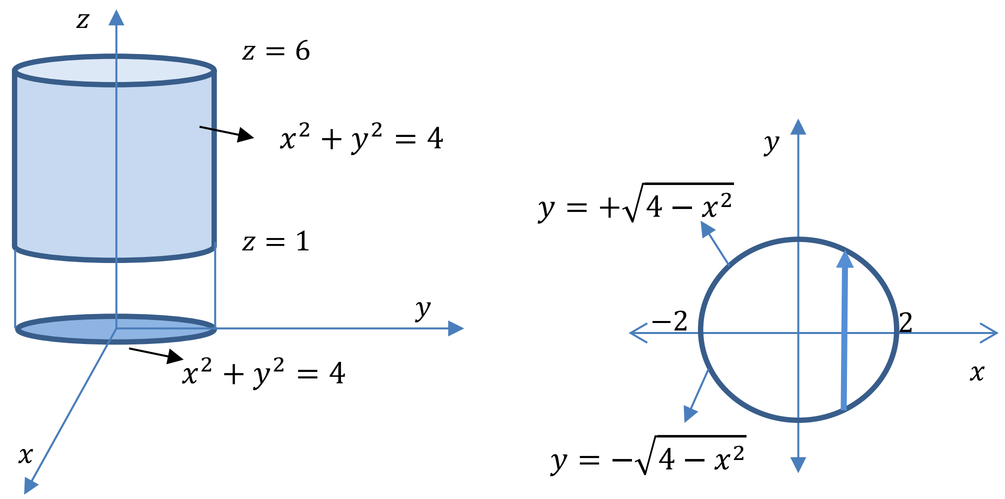


Figura 5

$$-2 \le x \le 2$$
$$-\sqrt{4 - x^2} \le y \le \sqrt{4 - x^2}$$
$$1 \le z \le 6$$

b) Cálculo de la integral

$$V = \iiint_V dxdydz = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{1}^{6} dz\, dy\, dx = \cdots$$

La solución se deja para el lector

CAMBIO DE COORDENADAS

La integral del ejemplo 3 resulta muy complicada por sus límites. Su resolución se puede simplificar si se hace un cambio de variable adecuado.

Al igual que con integrales dobles, al realizar un cambio de coordenadas se debe calcular el determinante de una matriz Jacobiana, la cual en el caso de integrales triples es de 3×3.

En el espacio estudiaremos tres tipos de coordenadas: Cartesianas, Cilíndricas y Esféricas.

Las coordenadas Cartesianas son las que hemos trabajado hasta ahora. Veamos las otras dos.

COORDENADAS CILÍNDRICAS

Todo punto del espacio queda identificado por tres parámetros. En el sistema cartesiano son x, y, z. También está el sistema de coordenadas cilíndricas que permite trabajar con regiones limitadas por ciertas superficies de una manera más sencilla que con las cartesianas

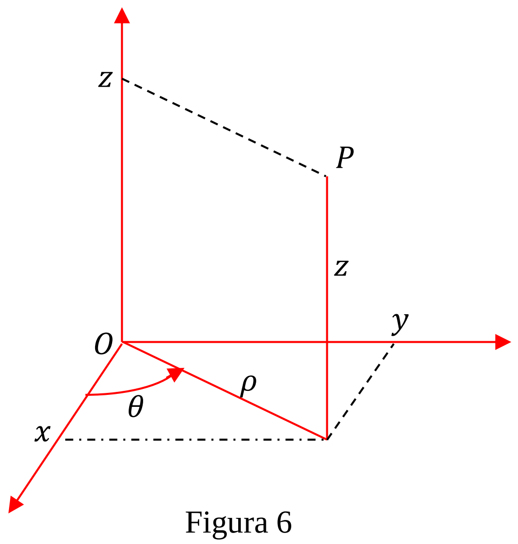


Figura 6

En el sistema de coordenadas cilíndricas, un punto P en el espacio tridimensional está representado por $P(\rho, \theta, z)$ donde ρ y θ son las coordenadas polares de la proyección del punto P en el plano xy y z es la altura desde el plano xy hasta el punto P (ver Figura 6)

La transformación de coordenadas cilíndricas a cartesianas está dada por las ecuaciones

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ Y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

La transformación inversa que va de cartesianas a cilíndricas es

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad z = z \qquad \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

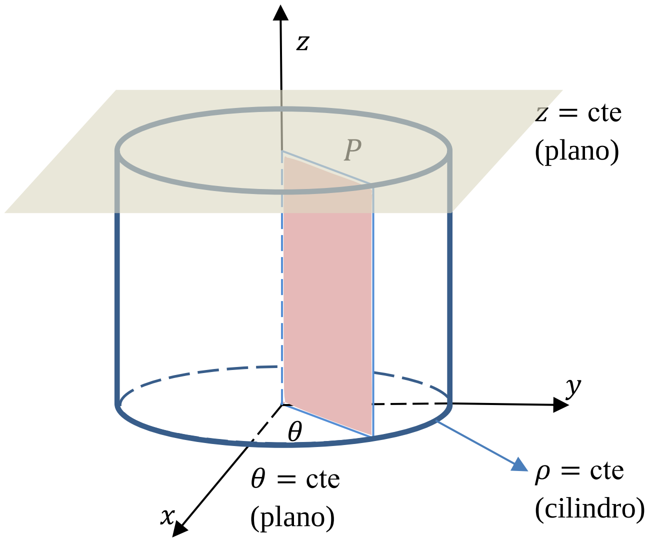


Figura 7

Las coordenadas cilíndricas se usan generalmente en problemas donde el recinto de integración tiene simetría respecto de un eje, que generalmente es el eje z. Como en el caso del cilindro de la Figura 7.

Todo plano vertical será en coordenadas cilíndricas $\theta =$ cte, mientras que los cilindros son de ecuación $\rho =$ cte. Los planos paralelos al plano xy son de ecuación $z =$ cte (ver Figura 7)

Al igual que con las integrales dobles, cuando se realiza un cambio de coordenadas se debe calcular el Jacobiano ($\mathcal{J}$) que es el factor de proporcionalidad entre los volúmenes de una región en el sistema cartesiano con una región en el sistema cilíndrico.

El Jacobiano de las coordenadas cilíndricas es

$$\mathcal{J}(\rho,\theta,z) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)} = \begin{vmatrix} X_\rho & Y_\rho & Z_\rho \\ X_\theta & Y_\theta & Z_\theta \\ X_z & Y_z & Z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) & 0 \\ -\rho\operatorname{sen}(\theta) & \rho\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

Ejemplo 4

Hallar el volumen interior a la superficie $S_1 : x^2 + y^2 = 1$ limitada por las superficies $S_2 : z = 4$ y $S_3 : z = 1 - x^2 - y^2$.

Es importante identificar las superficies y luego graficarlas para determinar la región a integrar.

En este caso la superficie S_1 es un cilindro (falta una variable) cuya forma está determinada por la ecuación de la circunferencia de radio 1. La superficie S_3 es un paraboloide invertido, esto es, abierto hacia los z negativos. La superficie S_2 es un plano paralelo al plano xy, como lo muestra la Figura 9

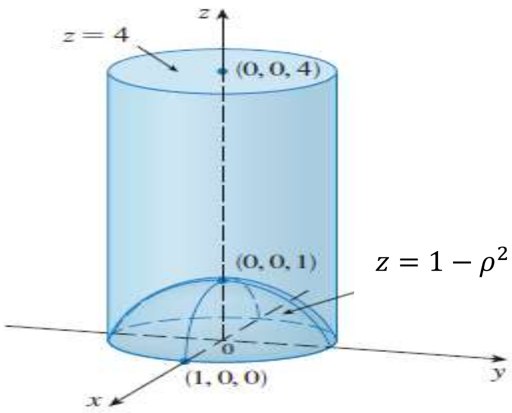


Figura 9

Cada superficie debo expresarla en las coordenadas cilíndricas:

Cilindro: $x^2 + y^2 = 1$

$$\Rightarrow \quad \rho^2\cos^2(\theta) + \rho^2\,\mathrm{sen}^2(\theta) = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho = 1}$$

Paraboloide: $z = 1 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow$

$$\mathrm{z} = 1 - \rho^2\cos^2(\theta) - \rho^2\,\mathrm{sen}^2(\theta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{z = 1 - \rho^2}$$

El plano $z = 4$ queda expresado igual $\boxed{z = 4}$

Luego se tiene que analizar la variación de los parámetros.

Si bien el sólido está limitado inferiormente por el paraboloide, la proyección del sólido en el plano xy es un círculo de radio igual al del cilindro, en este caso 1.

$$0 \leq \rho \leq 1$$

Si trazamos un rayo vertical paralelo al eje z se entra al sólido por el paraboloide y se sale por el plano. Luego el límite de z es

$$\underbrace{1 - \rho^2}_{\text{paraboloide}} \leq z \leq \underbrace{4}_{\text{plano}}$$

Como no hay planos verticales, el cilindro está completo alrededor del eje z implicando que

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

De esta manera la integral queda

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-\rho^2}^4 \rho\,dz\,d\rho\,d\theta = 2\pi\int_0^1 \rho z\Big|_{1-\rho^2}^4\,d\rho = 2\pi\int_0^1 \rho(4-1+\rho^2)\ d\rho$$

$$=2\pi\left(\frac{3}{2}\rho^2+\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{7}{2}\pi$$

COORDENADAS ESFÉRICAS

Otro sistema de coordenadas en tres dimensiones muy útil es el sistema de coordenadas esféricas. Simplifica el cálculo de integrales triples sobre regiones limitadas por esferas y conos.

Las coordenadas esféricas asociadas a un punto es la terna $P(\rho,\theta,\varphi)$ donde ρ es la distancia del punto P en el espacio respecto al origen de coordenadas, θ es el ángulo que forma la proyección de P en el plano xy con el eje x en sentido anti horario, y φ es el ángulo que forma el radio vector de $\overrightarrow{OP}$ con el plano xy (ver la Figura 10)

La expresión de la transformación entre coordenadas cartesianas y esféricas está dada por

$$\|\overrightarrow{OP}\|=\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\theta=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

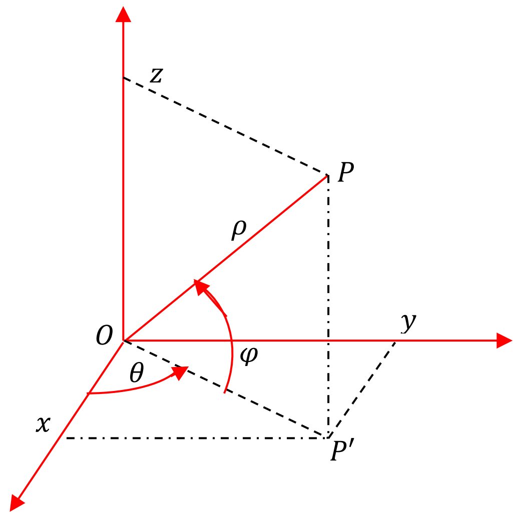


Figura 10

Si se tiene en cuenta que

$$\left\|\overrightarrow{OP'}\right\|=\rho\cos(\varphi)\qquad x=\left\|\overrightarrow{OP'}\right\|\cos(\theta)\qquad y=\left\|\overrightarrow{OP'}\right\|\operatorname{sen}(\theta)$$

Las coordenadas cartesianas en función de las esféricas resultan

$$\begin{cases} x = X(\rho,\theta,\varphi) = \rho\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ y = Y(\rho,\theta,\varphi) = \rho\cos(\varphi)\,\mathrm{sen}(\theta) \\ z = Z(\rho,\theta,\varphi) = \rho\,\mathrm{sen}(\varphi) \end{cases}$$

$$0 \le \theta \le 2\pi \qquad \text{(meridianos)}$$

$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \qquad \text{(latitudes)}$$

$$\rho \ge 0$$

Jacobiano de las Coordenadas Esféricas

$$J = J(\rho,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} X_\rho & Y_\rho & Z_\rho \\ X_\theta & Y_\theta & Z_\theta \\ X_\varphi & Y_\varphi & Z_\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\varphi)\,\mathrm{sen}(\theta) & \mathrm{sen}(\varphi) \\ -\rho\cos(\varphi)\,\mathrm{sen}(\theta) & \rho\cos(\varphi)\cos(\theta) & 0 \\ -\rho\,\mathrm{sen}(\varphi)\cos(\theta) & -\rho\,\mathrm{sen}(\varphi)\,\mathrm{sen}(\theta) & \rho\cos(\varphi) \end{vmatrix} = \text{(Ejercicio)}$$

$$= \rho^2\cos(\varphi)$$

Ejemplo 5: Hallar el volumen encerrado por la semiesfera de radio 4 considerando $z \ge 0$.

Si observamos la Figura 12 se puede ver que estamos trabajando con la semiesfera superior correspondiente a los z positivos. Luego esto implica que el ángulo φ se moverá entre 0 y $\frac{\pi}{2}$

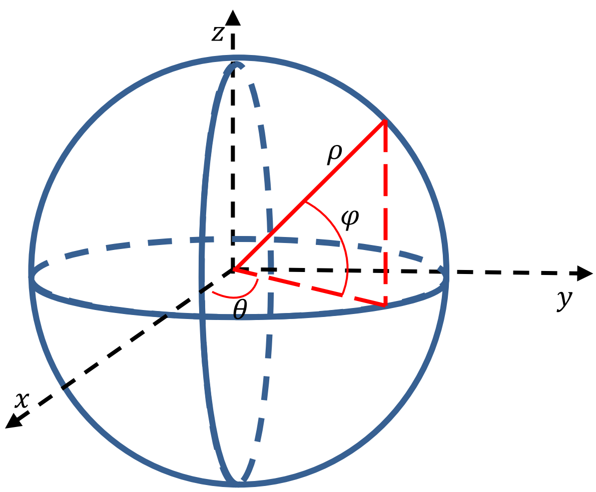


Figura 12

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^4 \rho^2 \cos(\varphi)\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\varphi) \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^4 d\varphi\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{64}{3} \cos(\varphi) d\varphi\, d\theta$$

$$= \frac{64}{3} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\varphi)|_0^{\pi/2}\, d\theta = \frac{128}{3}\pi$$

APLICACIONES FÍSICAS DE LAS INTEGRALES TRIPLES

Al igual que en integrales dobles, las integrales triples se utilizan para calcular la masa, el centro de gravedad y los momentos de un sólido.

Masa: Si $f(x, y, z) = \delta(x, y, z)$ es la densidad, entonces la masa será

$$M = \iiint_V \delta(x, y, z) dxdydz$$

Ejemplo: Calcular la masa de una esfera de radio 1 y densidad proporcional a la distancia al centro de la misma.

Dada la forma del sólido, utilicemos las coordenadas esféricas con los siguientes límites y Jacobiano:

$$\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \rho \le 1 \end{cases} \qquad \mathcal{J} = \rho^2 \cos(\varphi)$$

La densidad es proporcional a la distancia al centro de la misma, por lo que

$$\delta(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = k\rho$$

Por lo tanto

$$M = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 k\rho\rho^2 \cos(\varphi)\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = k2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^1 \cos(\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{k\pi}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\varphi)\, d\varphi = \frac{k\pi}{2} \sin(\varphi)|_{-\pi/2}^{\pi/2} = k\pi$$

Centro de Masa:

$$x_G = \frac{1}{M}\iiint_V x\ \delta(x,y,z)dxdydz \quad , \quad y_G = \frac{1}{M}\iiint_V y\ \delta(x,y,z)dxdydz \quad ,$$

$$z_G = \frac{1}{M}\iiint_V z\ \delta(x,y,z)dxdydz$$

<u>Ejemplo:</u> Calcular el centro de masa del sólido del ejemplo anterior considerando sólo la parte $x \geq 0$. Ayuda: Su masa es $M = k\pi/2$ ¿Por qué?

Continuamos usando coordenadas esféricas, pero cambian los límites:

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases} \qquad \mathcal{J} = \rho^2 \cos(\varphi)$$

La densidad sigue siendo $\delta(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2+z^2} = k\rho$

Luego

$$x_G = \frac{1}{M}\iiint_V x\ \delta(x,y,z)dxdydz =$$
$$= \frac{2}{k\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 \underbrace{\rho\cos(\varphi)\cos(\theta)}_{x}\, k\rho\rho^2\cos(\varphi)\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \cdots$$
$$= 0.4$$

$$y_G = \frac{1}{M}\iiint_V y\delta(x,y,z)dxdydz =$$
$$= \frac{2}{k\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 \underbrace{\rho\cos(\varphi)\operatorname{sen}(\theta)}_{y}\, k\rho\rho^2\cos(\varphi)\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \cdots = 0$$

$$z_G = \frac{1}{M}\iiint_V z\delta(x,y,z)dxdydz =$$
$$= \frac{2}{k\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 \underbrace{\rho\operatorname{sen}(\varphi)}_{z}\, k\rho\rho^2\cos(\varphi)\, d\rho\, d\varphi\, d\theta = \cdots = 0$$

Por lo tanto, el centro de masa es $(x_G, y_G, z_G) = (0.4\,, 0\,, 0)$

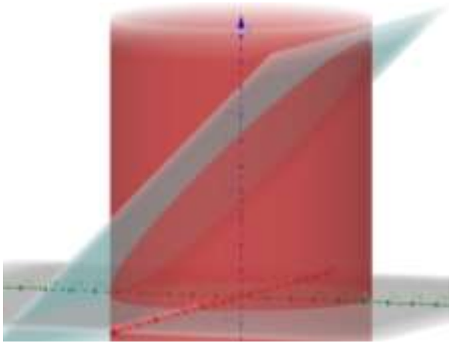
Momentos de Inercia respecto a los ejes coordenados:

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2)\delta(x,y,z)dxdydz$$

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2)\delta(x,y,z)dxdydz$$

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2)\delta(x,y,z)dxdydz$$

Ejemplo: Calcular el momento de inercia al girar respecto al eje z del sólido cilíndrico de densidad constante delimitado por las superficies $S_1: x^2 + y^2 = 1$; $S_2: z = 0$; $S_3: z = 1 + y$.



Dada la geometría del sólido, usaremos coordenadas cilíndricas con los siguientes límites y Jacobiano:

$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 + \rho\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases} \qquad \mathcal{J} = \rho$$

La densidad es constante, por lo que $\delta(x,y,z) = k$

La función a integrar es $f(x,y,z) = (x^2 + y^2)\delta(x,y,z) = k\rho^2$.

Luego

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2)\delta(x,y,z)dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1+\rho\,sen(\theta)} k\rho^2\rho\,dz\,d\rho\,d\theta = \cdots$$

$$= \frac{2}{3}k\pi$$