# CALCULO II

## Ingeniería  Mecánica
## Ingeniería Electromecánica

Equipo de Cátedra


| | |
|---|---|
| Profesor Titular | Dr. Javier Gimenez |
| Profesor Adjunto | Dr. Emanuel Tello |
| Jefe de Trabajos Prácticos | Mg. Juan Pablo Llarena |


AÑO 2024

# INTEGRALES CURVILÍNEAS DE CAMPOS VECTORIALES

## CAMPOS VECTORIALES

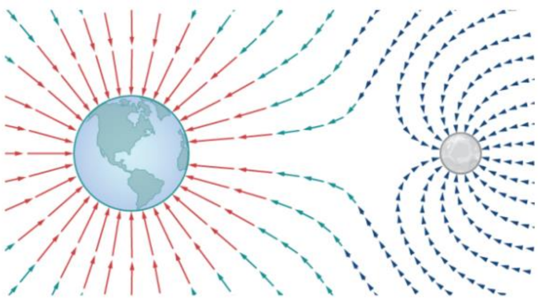
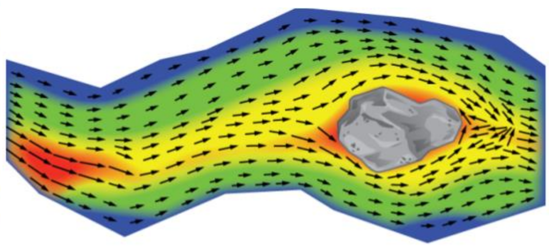
Los Campos Escalares son funciones o correspondencias que asignan a cada vector un número. En sentido opuesto, las curvas asignan a cada escalar un vector posición, cuya gráfica genera un arco.

Ahora estudiaremos el concepto de Campo Vectorial, el cual es una función que relaciona vectores de $\mathbb{R}^n$ con vectores de $\mathbb{R}^m$, esto es:

$$\vec{F}: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

De este modo, el dominio $D$ es un conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$, mientras que los resultados de la función son escalares ($n = 1$), vectores del plano ($n = 2$), vectores del espacio ($\mathbb{R}^3$), etc. Esto es, es una asignación que a cada punto de $D \subseteq \mathbb{R}^n$ le hace corresponder siempre un ***vector*** que puede tener cualquier dimensión independiente de los elementos del Dominio. Una curva es un caso particular de Campo Vectorial.

Estas funciones se utilizan para describir o parametrizar Curvas y Superficies en el espacio. También tienen aplicaciones en la Física para describir movimientos de puntos en el espacio a través de vectores de posición. Otro concepto importante que extraeremos de la física es el de campo de fuerzas, en el cual a cada punto del espacio se le asigna un vector de fuerzas a través del Campo Vectorial $\vec{F}(x, y, z)$.

## Concepto Físico de Trabajo de una fuerza $\vec{F}$

1. Concepto Físico de Trabajo de una fuerza $\vec{F}$.
   a. El trabajo de una fuerza es una medida de la energía transferida o transformada cuando la fuerza actúa sobre un objeto. Matemáticamente, dada una fuerza $\vec{F}$ y el vector desplazamiento $\vec{d}$ de su punto de aplicación, se define el Trabajo de $\vec{F}$ a lo largo de $\vec{d}$ como

$$W = \vec{F}.\vec{d}$$


Figura1

b. Si $\vec{F}(x, y, z) = \big(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\big)$ es un campo vectorial de fuerzas, entonces se quiere calcular el trabajo que realiza este campo al trasladar una partícula a lo largo de una curva $C$. Si cada punto de la curva se parametriza con $\vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, entonces el vector de desplazamiento instantáneo en cada punto de la curva es $\vec{r}\,'(t)$. Por otro lado, la fuerza que ejerce el campo sobre el objeto en el punto en cuestión es el valor que asigna el campo $\vec{F}$ sobre el punto $\vec{r}(t)$, esto es: $\vec{F}\big(\vec{r}(t)\big)$. De este modo, el trabajo producido en este punto fijado arbitrariamente es $W(t) = \vec{F}\big(\vec{r}(t)\big).\vec{r}\,'(t)$. Finalmente el trabajo acumulado a lo largo de la curva $C$ viene dado por

$$W = \int_a^b W(t)dt = \int_a^b \vec{F}\big(\vec{r}(t)\big).\vec{r}\,'(t)dt$$

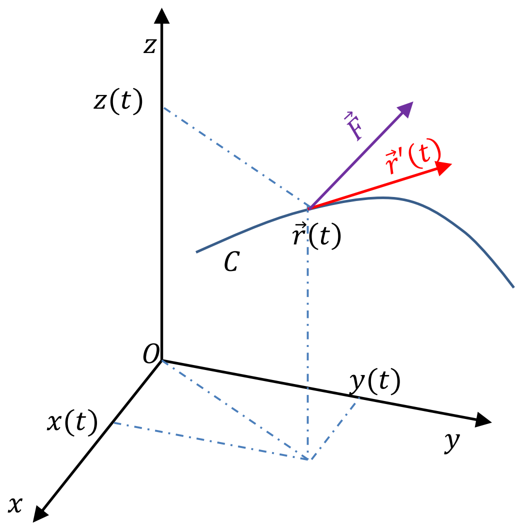



Figura 2

Esto induce la forma en la que se deben definir las integrales curvilíneas de campos vectoriales.

# Integral Curvilínea de Campos Vectoriales

**Definición:** Sea $\vec{F}(x,y,z)=\big(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\big)$ un campo vectorial continuo y acotado en un Dominio $D\subseteq\mathbb{R}^3$ que contiene el arco de curva regular $C$ con punto inicial $A$ y punto final $B$, y con la representación paramétrica $\vec{r}(t)$ en $a\le t\le b$. La integral curvilínea de $\vec{F}$ a lo largo de $C$ se define como

$$\underbrace{\int_C \vec{F}\,d\vec{r}}_{\text{Integral Curv.}} = \underbrace{\int_a^b \vec{F}\big(\vec{r}(t)\big).\vec{r}\,'(t)dt}_{\text{Integral de Cálculo I}}$$

donde $\vec{F}(\vec{r}(t))$ significa que la función vectorial $\vec{F}$ se expresa según la parametrización en función de $t$, esto es:

$$\vec{F}\big(\vec{r}(t)\big)=\Big(P\big(x(t),y(t),z(t)\big),Q\big(x(t),y(t),z(t)\big),R\big(x(t),y(t),z(t)\big)\Big)$$

Cuando la curva es cerrada se simboliza

$$\oint_C \vec{F}\,d\vec{r}=\int_a^b \vec{F}\big(\vec{r}(t)\big).\vec{r}\,'(t)dt$$

Esta integral se llama en general Circulación de $\vec{F}$ a lo largo de la curva $C$. En otras palabras, la circulación es el trabajo a lo largo de una curva cerrada.

Si se expresa el producto escalar en función de las componentes

$$d\vec{r}=\vec{r}\,'(t)dt=(x'(t),y'(t),z'(t))dt=\Big(\underbrace{x'(t)dt}_{dx},\underbrace{y'(t)dt}_{dy},\underbrace{z'(t)dt}_{dz}\Big)$$

$$d\vec{r}=(dx,dy,dz)$$

Entonces, se obtiene una nueva forma de denotar estas integrales:

$$\vec{F}.d\vec{r}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)).(dx,dy,dz)$$

$$\vec{F}.d\vec{r}=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

$$\boxed{\int_C \vec{F}\,d\vec{r}=\int_C P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz}$$

<u>Observaciones</u>

- La integral curvilínea se define mediante una integral definida de una variable.
- La integral curvilínea de campos vectoriales depende de $\vec{F}$ y de $C$. Si fijamos el campo vectorial varía según la curva $C$.

**Ejemplo 1**

Hallar la integral $\int_C xy\,dx - x\,dy$ sabiendo que $C$ es alguno de los arcos de curva que unen a los puntos $A = (0,0)$ y $B = (1,1)$ diagramados en la Figura 3 y dados por:

a) El segmento rectilíneo que une dichos puntos
b) El arco de parábola $y = x^2$ entre los mismos puntos

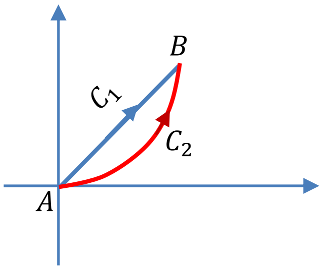



Figura 3

<u>Solución:</u>

a) Los pasos a seguir son

- Primero se grafica la curva (ver Figura 3) y se parametriza.
  La parametrización de la recta que pasa por dos puntos es

$$\begin{cases} x_0 = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y_0 = y_0 + t(y_1 - y_0) \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1$$

- Luego se realizan los cálculos previos antes de integrar, esto es: expresar el campo vectorial reemplazando la parametrización, calcular el vector $d\vec{r}$ y luego hacer el producto escalar.

$$\vec{r}(t) = (t, t)$$
$$d\vec{r} = \vec{r}\,'(t)dt$$
$$d\vec{r} = (1,1)dt$$

$$F(x, y) = (xy, -x)$$
$$F\big(\vec{r}(t)\big) = (t^2, -t)$$

$$F\big(\vec{r}(t)\big).\vec{r}\,'(t) = (t^2, -t).(1,1) = t^2 - t$$

- Calcular la integral

$$\int_{C_1} \vec{\mathrm{F}}\,d\vec{r} = \int_0^1 F\big(\vec{r}(t)\big).\vec{r}\,'(t)dt = \int_0^1 (t^2 - t)dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{6}$$

b) Si $C$ es el arco de parábola $y = x^2$ entre los mismos puntos

- La gráfica está en la Figura 3.
  La parametrización de la parábola es
  $$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 1$$

- Se realizan los cálculos previos:
  $$\vec{r}(t) = (t, t^2) \quad \Longrightarrow \quad \vec{r}\,'(t) = (1, 2t)$$
  $$F(x, y) = (xy, -x) \quad \Longrightarrow \quad \vec{F}\big(\vec{r}(t)\big) = (t^3, -t)$$
  $$F\big(\vec{r}(t)\big).\vec{r}\,'(t) = (t^3, -t).(1, 2t) = t^3 - 2t^2$$

- Calcular la integral
  $$\int_{C_2} \vec{\mathrm{F}}\, d\vec{r} = \int_0^1 (t^3 - 2t^2)dt = \left(\frac{t^4}{4} - \frac{2}{3}t^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = -\frac{5}{12}$$

Se puede ver que para un mismo Campo Vectorial la Integral Curvilínea depende del camino de integración, lo cual es bastante lógico, pero esto no siempre es así.

Si lo relacionamos con la Física, $\int_{\widehat{AB}} \vec{F}.d\vec{r}$ es el trabajo realizado por el campo entre los puntos $A$ y $B$. Pero por física sabemos que a veces el trabajo no depende del camino de integración.

**Ejemplo 2**

Hallar el trabajo realizado por el campo $\vec{F}(x, y) = x^2\breve{\imath} + y^2\breve{\jmath}$ sobre cualquier arco de curva $C$ dado por la representación vectorial $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ , $a \leq t \leq b$ tal que $\vec{r}(a) = A$ y $\vec{r}(b) = B$

<u>Solución:</u>

$$\int_C \vec{\mathrm{F}}\, d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}\big(\vec{r}(t)\big).\vec{r}\,'(t)dt = \int_a^b (x^2(t), y^2(t))(x'(t), y'(t))dt$$
$$= \int_a^b \Big(\underbrace{x^2(t)x'(t) +}_{f^n f'} \underbrace{y^2(t)y'(t)}_{f^n f'}\Big)dt = \left(\frac{x^3(t)}{3} + \frac{y^3(t)}{3}\right)\Bigg|_a^b$$
$$= \frac{x^3(b)}{3} + \frac{y^3(b)}{3} - \frac{x^3(a)}{3} - \frac{y^3(a)}{3}$$

Se puede observar que en este caso la $\int_C \vec{\mathrm{F}}\, d\vec{r}$ depende únicamente de los puntos extremos y no del camino que los une.

Esta propiedad es muy importante para el cálculo de ciertos problemas físicos como el Trabajo que realiza un campo vectorial para desplazar una partícula de un punto a otro sin importar el camino recorrido, esto es, el trabajo es el mismo para cualquier camino que une los puntos. Estos campos en Física se llaman *Gradientes* o *Conservativos*.

Analizaremos estos campos desde el punto de vista matemático.

## CAMPOS GRADIENTES

Antes de comenzar, repasemos algunos conceptos topológicos.

Los Dominios de los campos vectoriales pueden ser Conexos (conectados) o no conexos (disjuntos). Además, los dominios Conexos pueden ser simplemente Conexos, doblemente Conexos, o múltiplemente Conexos (ver Figura 4)

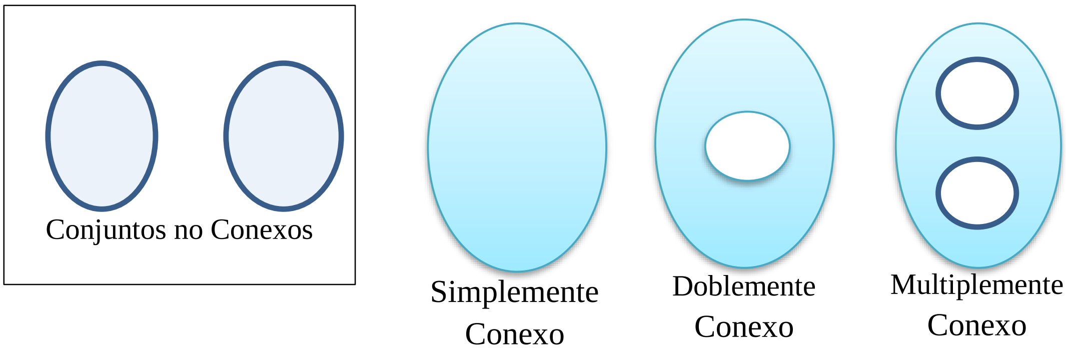



Figura 4

**Definición de Campo Gradiente o Campo Conservativo, y de Función Potencial**

Un Campo Vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ se llama Campo Gradiente o Conservativo si existe una función escalar $\varphi(x,y,z)$ diferenciable tal que se cumple

$$\vec{F}(x,y,z) = \overrightarrow{\nabla\varphi}(x,y,z)$$

Esta función $\varphi(x,y,z)$ recibe el nombre de Función Potencial del Campo

$$\text{Notar que } \vec{F} = \overrightarrow{\nabla\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} P = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\ Q = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ R = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{cases}$$

Esto significa que las componentes del campo vectorial son las derivadas parciales de la función potencial respecto a cada una de las variables

## Condición Necesaria y Suficiente para que un campo vectorial sea Campo Gradiente

**Teorema:** Sea $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ un Campo Vectorial definido en un Dominio Simplemente Conexo, y cuyas funciones componentes $P$, $Q$ y $R$ tienen derivadas parciales continuas. La condición Necesaria y Suficiente para que el campo sea un Campo Gradiente es que se verifiquen:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

## Demostración

### i. Si $\vec{F}(x,y,z)$ es un Campo Gradiente $\Longrightarrow$ las cruzadas son iguales

Si el campo vectorial es gradiente entonces se cumple

$$\vec{F} = \overrightarrow{\nabla\varphi} = \left( \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}_{P}, \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}_{Q}, \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}_{R} \right)$$

Luego, como $P$, $Q$ y $R$ tienen derivadas parciales continuas, resulta que $\varphi$ tiene derivadas parciales segundas continuas, y por ende, usando el Teorema de Clairaut, resulta

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y}$$

Finalmente, usando que $P = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $R = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, resulta que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

### ii. Las cruzadas son iguales $\Longrightarrow$ $\vec{F}(x,y,z)$ es un Campo Gradiente

(La demostración escapa al objetivo del curso)

# Teorema Fundamental de los Campos Gradientes

Si $\vec{F}(x, y, z)$ un Campo Vectorial Continuo definido en un dominio Simplemente Conexo, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $\vec{F}(x, y, z)$ es un Campo Gradiente con $\vec{F} = \overrightarrow{\nabla\varphi}$
2. $\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A) \quad \forall\, C$ regular con punto inicial $A$ y punto final $B$. (En otras palabras, la integral es independiente del camino).
3. $\oint_C \vec{F}\, d\vec{r} = 0 \quad \forall C$ regular y cerrada

## Demostración

Este teorema se puede demostrar de varias formas. En este curso haremos:

$$1 \Longrightarrow 2 \ , \ \ 2 \Longrightarrow 3 \ \ \text{y} \ \ 3 \Longrightarrow 1$$

De esa forma quedan demostradas todas las equivalencias entre las premisas dadas

## $1 \Longrightarrow 2$

Si el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z)$ es conservativo, entonces por definición existe una función potencial $\varphi(x, y, z)$ tal que

$$\vec{F} = \overrightarrow{\nabla\varphi}$$

Ahora debemos probar que

$$\int_C \vec{F}\, d\vec{r} \qquad \text{no depende de la curva } C$$

Consideremos una curva $C$ regular cualquiera que une los puntos $A$ y $B$ con parametrización $\vec{r}(t), a \le t \le b$. Luego $\vec{r}(a) = A$ y $\vec{r}(b) = B$.

Consideremos la función auxiliar $g: [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = \varphi(\vec{r}(t)) = \varphi(x(t), y(t), z(t))$$

que solo toma los valores de la función potencial sobre los puntos de la curva $C$. Luego, por la regla de la cadena

$$g'(t) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}z'(t) = \overrightarrow{\nabla\varphi}.\vec{r}\,'(t)$$

Luego

$$\int_a^b g'(t)dt = \int_a^b \overrightarrow{\nabla\varphi}.\vec{r}\,'(t)dt = \int_C \overrightarrow{\nabla\varphi}\, d\vec{r} = \int_C \vec{F}\, d\vec{r}$$

Por otro lado, por el teorema fundamental del cálculo

$$\int_a^b g'(t)dt = g(b) - g(a) = \varphi(\vec{r}(b)) - \varphi(\vec{r}(a)) = \varphi(B) - \varphi(A)$$

Por lo tanto, la integral es independiente del camino elegido.

### $2 \Longrightarrow 3$

Si la curva $C$ es cerrada entonces $A = B$, luego

$$\oint_C \vec{F}\, d\vec{r} = \varphi(A) - \varphi(A) = 0$$

### $3 \Longrightarrow 1$

La demostración escapa a los objetivos del curso

**Ejemplo** (Necesidad de que el dominio sea simplemente conexo):

Sea $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ con dominio $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, esto es, todo el plano menos el origen de coordenadas. $D$ no es simplemente conexo, y por ende no se puede garantizar la equivalencia de las condiciones dadas en el Teorema.

Luego, a pesar de que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, el campo no es conservativo, pues si consideramos la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ (curva cerrada) con parametrización $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), 0 \le t \le 2\pi$, entonces

$$\oint_C \vec{F}.d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)).\vec{r}'(t)dt = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t, \cos t).(-\operatorname{sen} t, \cos t)dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$

## Método del Cálculo de la función Potencial $\varphi(x,y,z)$

Si que el campo vectorial $\vec{F}$ es Campo Gradiente, entonces por definición se cumple que $\vec{F} = \overrightarrow{\nabla\varphi}$, y por ende, se tiene que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P(x,y,z) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\varphi(x,y,z) = \int P(x,y,z)\, dx + f_1(y,z)} \qquad (a)$$

Como integro respecto de la variable $x$, las otras variables $y$, $z$, son constantes respecto a $x$. Luego, como es una integral indefinida, se debe sumar una constante arbitraria que puede ser función de las otras dos variable, $f_1(y,z)$, resultando constante respecto de $x$

Análogamente hacemos lo mismo con las otras funciones

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q(x,y,z) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\varphi(x,y,z) = \int Q(x,y,z)\,dy + f_2(x,z)} \qquad (b)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = R(x,y,z) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\varphi(x,y,z) = \int R(x,y,z)\,dz + f_3(x,y)} \qquad (c)$$

Comparando los resultados obtenidos en $(a), (b)$ y $(c)$, como $\varphi(x,y,z)$ es única, el resultado final de $\varphi(x,y,z)$ será la suma de los términos comunes (sin repetir) con los no comunes en las tres expresiones.

**Ejemplo 3**

Sea $\vec{F}(x,y,z) = y\check{\imath} + x\check{\jmath} + \check{k}$

a) Verificar que es gradiente
b) Calcular la función potencial $\varphi(x,y,z)$
c) Calcular $\int_C \vec{F}.\,d\vec{r}$ donde $C$ es una curva que va de $A = (1,1,1)$ a $B = (-1\ 2\ 3)$

Solución:

a) Para que $\vec{F}(x,y,z)$ sea gradiente se debe cumplir que su dominio sea simplemente conexo y que las derivadas parciales cruzadas sean iguales. El dominio del campo es todo $\mathbb{R}^3$, por lo que es simplemente conexo. Por otro lado, se cumple que las parciales cruzadas son iguales, ya que:

$$P(x,y,z) = y \qquad Q(x,y,z) = x \qquad R(x,y,z) = 1$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Por lo tanto, el Campo Vectorial es Gradiente.

b) Como es un campo Gradiente existe la función potencial $\varphi(x,y,z)$, la cual debemos calcular

$$\varphi(x,y,z) = \int P(x,y,z)\,dx + f_1(y,z) = \int y dx + f_1(y,z) = yx + f_1(y,z)$$

$$\varphi(x,y,z) = \int Q(x,y,z)\,dy + f_2(x,z) = \int x dy + f_2(x,z) = xy + f_2(x,z)$$

$$\varphi(x,y,z) = \int R(x,y,z)\,dz + f_3(x,y) = \int 1 dz + f_3(x,y) = z + f_3(x,y)$$

Comparando las tres expresiones resulta

$$\varphi(x,y,z) = xy + z + K$$

donde $K$ es la constante de integración.

c) Cálculo de la integral

Como $\vec{F}$ es gradiente, la $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ es independiente del camino de integración luego

$$\int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A) = \varphi(-1,2,3) - \varphi(1,1,1)$$

Reemplazando en $\varphi(x,y,z) = xy + z + K$ la integral da

$$\int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = \Big(\underbrace{-1\cdot 2 + 3 + K}_{\varphi(B)}\Big) - \Big(\underbrace{1\cdot 1 + 1 + K}_{\varphi(A)}\Big) = -1$$

## Teorema de Green

Veremos una conexión importante entre integrales curvilíneas de campos vectoriales e integrales dobles.

**Teorema:** Sea $C$ una curva de $\mathbb{R}^2$ cerrada, simple, regular a trozos, y positivamente orientada, y sea $D$ la región interior a $C$. Sea $\vec{F} = (P,Q) : D \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial cuyas componentes $P$ y $Q$ tienen derivadas parciales continuas. Entonces

$$\oint_C \vec{F} d\vec{r} = \oint_C (Pdx + Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

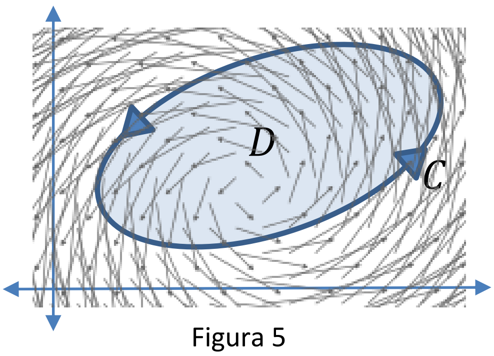



Figura 5

**Demostración:** Asumamos que la curva $C$ se puede dividir de las formas diagramadas en la Figura 6, caso contrario, se puede particionar la región $D$ en subregiones cuyas fronteras tengan tales características, y luego el resultado se obtiene sumando integrales.

De este modo, $C = C_1 \cup C_2 = C_3 \cup C_4$ con parametrizaciones dadas por

$$C_1: \begin{cases} x = x \\ y = Y_1(x) \end{cases} \text{ con } \ a \le x \le b \quad ; \quad -C_2: \begin{cases} x = x \\ y = Y_2(x) \end{cases} \text{ con } \ a \le x \le b$$

$$C_3\!:\begin{cases} x = X_3(y) \\ y = y \end{cases} \text{ con } \; c \le y \le d \quad ; \quad -C_4\!:\begin{cases} x = X_4(y) \\ y = y \end{cases} \text{ con } \; c \le y \le d$$

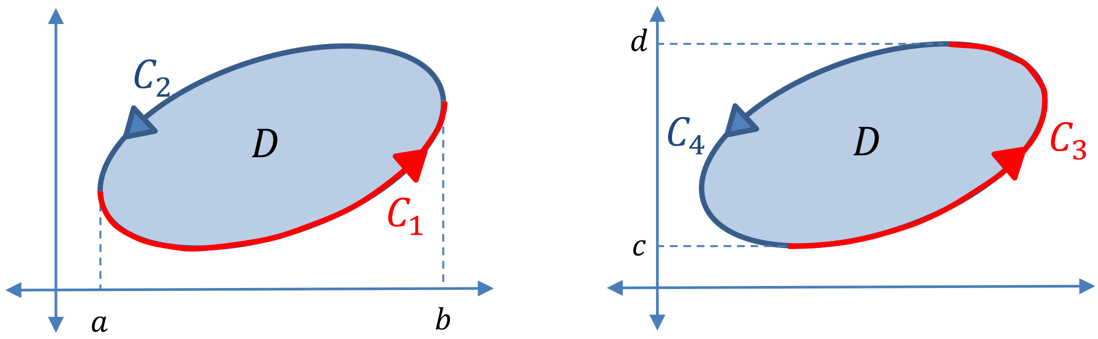


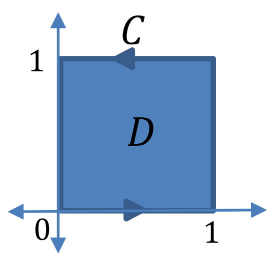

Figura 6

donde $-C_i$ indica que se está parametrizando la curva en sentido opuesto a lo diagramado, esto es, en sentido horario.

Luego

$$\begin{aligned} \int_C (Pdx + Qdy) &= \int_C Pdx + \int_C Qdy = \int_{C_1} Pdx + \int_{C_2} Pdx + \int_{C_3} Qdy + \int_{C_4} Qdy \\ &= \int_a^b P\big(x, Y_1(x)\big)dx - \int_a^b P\big(x, Y_2(x)\big)dx + \int_c^d Q(X_3(x), y)dy - \int_c^d Q(X_4(x), y)dy \\ &= \int_a^b \Big(P\big(x, Y_1(x)\big) - P\big(x, Y_2(x)\big)\Big)\, dx + \int_c^d \big(Q(X_3(x), y) - Q(X_4(x), y)\big)dy \\ &= \int_a^b \int_{Y_2(x)}^{Y_1(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)dy\, dx + \int_c^d \int_{X_4(x)}^{X_3(x)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)dx\, dy \\ &= -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy + \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \end{aligned}$$

**Ejemplo:** Calcular $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ siendo $C$ la frontera del cuadrado de la Figura y $\vec{F} = (P, Q) = (y^2 + x^3, x^4)$




Para realizar el cálculo por intermedio de integrales curvilíneas se deben parametrizar los cuatro lados del cuadrado, y por ende, el cálculo es extenso.

Por otro lado, si aplicamos el teorema de Green

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} d\vec{r} &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_0^1 \int_0^1 (4x^3 - 2y)dx\, dy = \int_0^1 (x^4 - 2xy)\big|_0^1\, dy \\ &= \int_0^1 (1 - 2y)\, dy = (y - y^2)\big|_0^1 = 0 \end{aligned}$$

## **Aplicación del Teorema de Green:** Cálculo de Áreas.

Si consideramos el campo $\vec{F} = (0, x)$ entonces

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (1-0) dxdy = \iint_D dxdy = \text{Area}(D)$$

Por lo tanto, se puede calcular el área de una región por intermedio de una integral curvilínea considerando el campo $\vec{F} = (0, x)$ y como curva la frontera de la región.

**Ejemplo:** Calcular el área interior de la elipse dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

En este caso, la curva $C$ es la elipse parametriza por

$$\vec{r}(t) = (a \cos t \,, b \operatorname{sen} t) \text{ con } 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\vec{r}\,'(t) = (-a \operatorname{sen} t \,, b \cos t)$$

$$\vec{F}(x, y) = (0, x) \quad \Longrightarrow \quad \vec{F}\big(\vec{r}(t)\big) = (0, a \cos t)$$

$$\vec{F}\big(\vec{r}(t)\big).\vec{r}\,'(t) = ab \cos^2 t$$

$$\text{Area} = \int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_0^{2\pi} ab \cos^2 t \, dt = ab \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = ab \left(\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$
$$= ab\pi$$