CALCULO II

Ingeniería Mecánica
Ingeniería Electromecánica

Equipo de Cátedra

Profesor Titular	Dr. Javier Gimenez
Profesor Adjunto	Dr. Emanuel Tello
Jefe de Trabajos Prácticos	Mg. Juan Pablo Llarena

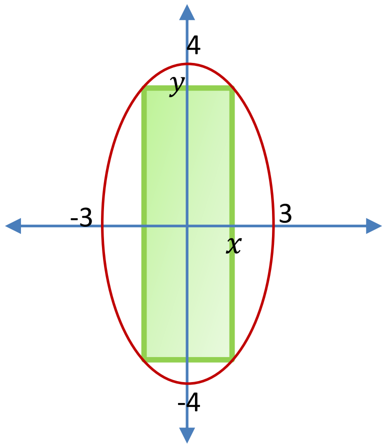
AÑO 2024

EXTREMOS CONDICIONADOS

Problema 1

Hallar el rectángulo de área máxima que puede inscribirse en la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

Se nos pide las dimensiones que debe tener el rectángulo para que el área sea máxima, pero con la condición que ese rectángulo está inscripto en la elipse. Gráficamente será



Luego

***Función Objetivo*:** Es la que quiero extremar

$$Area = b.h = 2x.2y = 4xy \qquad \text{tal que } \; x, y > 0$$

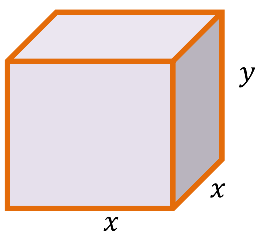
Función de Ligadura: Es la función que vincula las variables, en este caso el punto (x, y) pertenece a la elipse, y por ende satisface su ecuación

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$$

Problema 2

Con una cartulina se desea construir una caja de base cuadrada (sin tapa) que encierre un volumen dado V. Se pretende ahorrar material, y para ello, se debe minimizar la cantidad de cartulina a utilizar.

El volumen es constante y está dado por $V = x^2 y$



Ahorrar material significa ocupar la menor área posible de cartulina para armar la caja, luego la función a minimizar es la suma de las áreas de las caras

$$A = x^2 + 4xy$$

Entonces el modelo matemático del problema es:

Función Objetivo $A(x,y) = x^2 + 4xy$

Función de Ligadura $V = x^2 y =$cte

Problema 3

Hallar el punto más próximo al origen de

i) la curva $\varphi(x,y) = 0$ en el plano (2D)

ii) la curva $\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = 0 \\ \varphi_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$ (resulta de intersectar dos superficies)

La función objetivo es la función distancia, o sea

$a)$ $d = \sqrt{x^2+y^2}$ (o directamente para ahorrar cuentas $d^2 = x^2 + y^2$)

$b)$ $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (o directamente para ahorrar cuentas $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$)

Luego el modelo matemático es

$a)$ Función a Minimizar $d = \sqrt{x^2+y^2}$

Función Ligadura $\varphi(x,y) = 0$

$b)$ Función a Minimizar $d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Función Ligadura $C: \begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = 0 \\ \varphi_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$

Observación

En estos problemas planteados las variables (x,y) o (x,y,z) no son independientes (libres) sino que están vinculadas (ligadas) por una o más ecuaciones (Llamadas funciones de ligaduras).

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA 1

Método I

La forma más natural de resolver este problema es despejar una de las variables, por ejemplo y de la ligadura $\varphi(x,y)=0$, obteniendo $y=g(x)$, y luego reemplazar la expresión de y en $z=f(x,y)$, para finalmente buscar el extremo de la función de una variable tal y como se vio en Cálculo I $z=f(x,g(x))$.

Esto es

$$z=4.x.y \quad (1) \qquad\qquad \text{con} \quad \varphi(x,y)=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-1=0 \quad (2)$$

Entonces, de (2)

$$y=4.\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} \quad \text{reemplazando en (1) queda} \quad z=16x\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$$

Función de una variable, para encontrar el máximo se procede como en Cálculo I

a) Se deriva e iguala a cero obteniendo el punto crítico.

b) Se calcula la derivada segunda en el punto y si es negativa hay un máximo.

Nota: No siempre se puede despejar una variable en función de la otra, lo que no permitiría hacer el análisis anterior. Por eso surge la necesidad de estudiar otro método.

Método II

MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

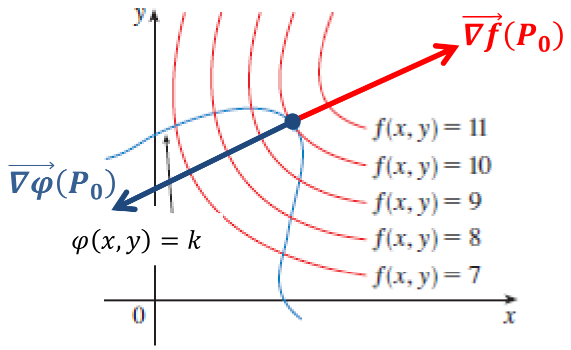
Es más fácil explicar el fundamento geométrico del método de Lagrange para funciones de dos variables. Para empezar, se calculan los valores extremos de $z=f(x,y)$, sujeta a una restricción de la forma $\varphi(x,y)=k$. Es decir, hay que buscar los valores extremos de $f(x,y)$ cuando el punto (x,y) está restringido a moverse sobre la curva $\varphi(x,y)=k$, la cual puede considerarse como la curva de nivel de una función auxiliar $u=\varphi(x,y)$ para $u=k$.

En la figura se ilustra esta curva junto con varias curvas de nivel de f, las cuales tiene como ecuación $f(x,y)=C$, con $C=7,8,9,10,11$.

Maximizar $f(x,y)$ sujeta a la condición $\varphi(x,y)=k$ es encontrar el valor más grande de C de tal que la curva de nivel $f(x,y)=C$ corte a $\varphi(x,y)=k$

Esto sucede cuando las curvas se tocan tangencialmente, es decir, cuando tienen una recta tangente en común. (De lo contrario, el valor de C podría incrementarse más). Esto quiere decir que los vectores gradientes tanto de $z = f(x, y)$ y de $u = \varphi(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) son paralelos. Esto es, existe un escalar λ para el cual se cumple

$$\vec{\nabla f}(x_0, y_0) = \mu . \vec{\nabla\varphi}(x_0, y_0) \quad \Longrightarrow \quad \vec{\nabla f}(x_0, y_0) + \lambda . \vec{\nabla\varphi}(x_0, y_0) = \vec{0}$$



Esta clase de razonamiento también se aplica al problema de encontrar los valores extremos de $f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $\varphi(x, y, z) = k$.

En lugar de hablar de curvas de nivel serán superficies de nivel, $f(x, y, z) = C$, y si el valor máximo de f es $f(x_0, y_0, z_0) = C$, entonces la superficie de nivel $f(x, y, z) = C$ es tangente a la superficie de nivel $\varphi(x, y, z) = k$ en el punto (x_0, y_0, z_0) , por ello los vectores gradientes correspondientes son paralelos. Luego se cumple

$$\vec{\nabla f}(x_0, y_0, z_0) = \mu . \vec{\nabla\varphi}(x_0, y_0, z_0) \quad \Longrightarrow \quad \vec{\nabla f}(x_0, y_0, z_0) + \lambda . \vec{\nabla\varphi}(x_0, y_0, z_0) = \vec{0}$$

Luego, se puede generalizar para n variables:

$$\vec{\nabla f}(P_0) + \lambda \vec{\nabla\varphi}(P_0) = \vec{0}$$

Desarrollando esta expresión para el caso de dos variables se tiene

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) + \lambda \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = (0{,}0)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Lagrange observó que estas últimas expresiones pueden considerarse como las derivadas parciales de una función auxiliar

$$\boxed{F^*(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)}$$

llamada Función de Lagrange, la cual cumple que

$$F^*(x,y,\lambda) \equiv f(x,y) \quad \forall (x,y) \text{ tal que } \varphi(x,y) = 0$$

De allí que el procedimiento para hallar los extremos de una función condicionada por una ligadura es análogo al procedimiento para calcular los puntos críticos de la Función de Lagrange.

Condición Necesaria de Extremo Condicionado

Sea $z = f(x,y)$ un campo escalar diferenciable, la condición necesaria para que el punto $P_0(x_0,y_0)$ sea un punto estacionario condicionado a la relación $\varphi(x,y) = 0$ es que exista una valor λ_0 (multiplicador de Lagrange) tal que la función de Lagrange

$$F^*(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$$

cumpla que sus derivadas parciales sean nulas en el punto (x_0,y_0,λ_0), o sea

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F^*}{\partial x}(x_0,y_0,\lambda_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0) + \lambda_0 \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(P_0) = 0 \\ \dfrac{\partial F^*}{\partial y}(x_0,y_0,\lambda_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0) + \lambda_0 \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(P_0) = 0 \\ \dfrac{\partial F^*}{\partial \lambda}(x_0,y_0,\lambda_0) = \varphi(P_0) = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema se encuentran los puntos críticos o puntos estacionarios candidatos a extremos.

En extremos libres se clasificaron los puntos estacionarios de un campo escalar $f(x,y)$ analizando el signo de $d^2 f$.

En el caso de extremos condicionados se analizará el signo de d^2F^* para clasificar los puntos estacionarios. Pero se debe recordar que estos puntos cumplen la condición de ligadura $\varphi(x,y) = 0$, lo que implica que x e y no son independientes, y por ende hay una relación entre dx y dy que debemos hallarla a partir de la identidad $d\varphi = 0$.

$$d\varphi = \varphi_x dx + \varphi_y dy = 0 \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$$

Luego la expresión del d^2F^* es:

$$\begin{aligned} d^2F^* &= d(dF^*) = d\big(F_x^* dx + F_y^* dy + F_\lambda^* d\lambda\big) = d\big(F_x^* dx + F_y^* y' dx + \varphi d\lambda\big) \\ &= d\big(F_x^* + F_y^* y'\big)dx + \underbrace{d(\varphi)}_{=0} d\lambda = d(F_x^*)dx + d\big(F_y^* y'\big)dx \qquad (1) \end{aligned}$$

Analicemos cada término por separado

$$d(F_x^*)dx = \left(F_{xx}^*dx + F_{xy}^*dy + \underbrace{F_{x\lambda}^*}_{=\varphi_x} d\lambda\right)dx = F_{xx}^*dx^2 + F_{xy}^*dxdy + \varphi_x dxd\lambda \qquad (2)$$

Por otro lado

$$d\left(F_y^*y'\right)dx = \left(\frac{\partial}{\partial x}(F_y^*y')dx + \frac{\partial}{\partial y}(F_y^*y')dy + \frac{\partial}{\partial \lambda}(F_y^*y')d\lambda\right)dx$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}(F_y^*)y'dx + F_y^*\frac{\partial}{\partial x}(y')dx + \frac{\partial}{\partial y}(F_y^*)y'dy + \frac{\partial}{\partial \lambda}(F_y^*)y'd\lambda\right)dx$$

$$= F_{xy}^*\underbrace{y'dx^2}_{=dy.dx} + F_y^*\underbrace{y''dx^2}_{d^2y} + F_{yy}^*\underbrace{y'dx}_{dy}dy + \underbrace{F_{y\lambda}^*}_{=\varphi_y}\underbrace{y'dx}_{dy}d\lambda$$

$$= F_{xy}^*dxdy + F_y^*d^2y + F_{yy}^*dy^2 + \varphi_y dyd\lambda \qquad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1), y ordenando convenientemente, resulta

$$d^2F^* = F_{xx}^*dx^2 + 2F_{xy}^*dxdy + F_{yy}^*dy^2 + F_y^*d^2y + \underbrace{\left(\varphi_x dx + \varphi_y dy\right)}_{=d\varphi=0}d\lambda$$

Por lo tanto $$d^2F^* = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 F^* + F_y^*d^2y$$

Sin embargo, en los puntos estacionarios se cumple que $F_y^* = 0$, luego d^2F^* se puede calcular igual que para el caso de Extremos Libres, o sea

$$d^2F^* = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 F^*$$

De lo analizado se concluye lo siguiente:

Condición De Suficiencia

Si $z = f(x,y)$ es un campo escalar diferenciable hasta orden 2 como mínimo en un punto $P_0(x_0,y_0)$, y φ una función diferenciable en $P_0(x_0,y_0)$, tales que la función de Lagrange $F^*(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$ tiene un punto estacionario en (x_0,y_0,λ_0), entonces se cumple

$$d^2F^*(x_0,y_0,\lambda_0) = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 F^*(x_0,y_0,\lambda_0)$$

Además, si se usa la relación $d\varphi = \varphi_x dx + \varphi_y dy = 0$ para escribir a dy en función de dx (o viceversa) la expresión anterior queda todo en función de una sola variable y su diferencial

$$d^2F^* = G(x)(dx)^2 \qquad \text{o} \qquad d^2F^* = G(y)(dy)^2$$

y por lo tanto, los puntos estacionarios se clasifican igual que en Cálculo I, es decir

$$d^2F^* \begin{cases} > 0 & \Longrightarrow & \text{mínimo} \\ < 0 & \Longrightarrow & \text{máximo} \\ \lesseqgtr 0 & \Longrightarrow & \text{ensilladura} \end{cases}$$

Se puede generalizar para más variables siguiendo el mismo razonamiento.

Problema Nº 1:

Función Objetivo $\qquad z = 4xy$

Función de Ligadura $\qquad \varphi(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0$

a) se construye la función de Lagrange y se calculan los puntos estacionarios

$$F^*(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$$

$$F^*(x,y,\lambda) = 4xy + \lambda\left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F^*}{\partial x} = 4y + \dfrac{2}{9}\lambda x = 0 & (1) \\ \dfrac{\partial F^*}{\partial y} = 4x + \dfrac{1}{8}\lambda y = 0 & (2) \\ \dfrac{\partial F^*}{\partial \lambda} = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

Despejando y de (1) y (2) e igualando las expresiones se obtiene

$$y = -\frac{1}{18}\lambda x = -\frac{32}{\lambda}x \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda^2 = 576 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \pm 24$$

Como $x > 0$ e $y > 0$ debemos considerar solamente $\lambda = -24$, luego

$$y = \frac{1}{18}24x = \frac{4}{3}x$$

Reemplazando en (3) se obtiene

$$x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} \qquad y = \pm\frac{4}{\sqrt{2}}$$

Recuerde que como son longitudes, no pueden ser negativas, por eso se tienen en cuenta solamente el signo positivo de x. Luego el punto estacionarios es $P_0\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}}\right)$ y $\lambda = -24$

Ahora se debe verificar que en dicho punto el área es máxima. Para ello se analiza el signo de $d^2F^*\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}}, -24\right)$

	$x_0=\frac{3}{\sqrt{2}}, \quad y_0=\frac{4}{\sqrt{2}}, \quad \lambda_0=-24$
$F^*_{xx}=\frac{2}{9}\lambda$	$F^*_{xx}\left(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{4}{\sqrt{2}},-24\right)=-\frac{16}{3}$
$F^*_{xy}=4$	$F^*_{xy}\left(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{4}{\sqrt{2}},-24\right)=4$
$F^*_{yy}=\frac{1}{8}\lambda$	$F^*_{yy}\left(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{4}{\sqrt{2}},-24\right)=-3$

$$d^2F^*=-\frac{16}{3}h^2+8hk-3k^2$$

$$d^2F^*=-\frac{16}{3}h^2-3\left(k^2-\frac{8}{3}hk+\frac{16}{9}h^2-\frac{16}{9}h^2\right)$$

$$d^2F^*=-\frac{16}{3}h^2-3\left(\underbrace{k^2-\frac{8}{3}hk+\frac{16}{9}h^2}_{\left(k-\frac{4}{3}h\right)^2}-\frac{16}{9}h^2\right)$$

$$d^2F^*=-\frac{16}{3}h^2-3\left(\left(k-\frac{4}{3}h\right)^2-\frac{16}{9}h^2\right)$$

$$d^2F^*=-\frac{16}{3}h^2-3\left(k-\frac{4}{3}h\right)^2+\frac{16}{3}h^2=-3\left(k-\frac{4}{3}h\right)^2\leq 0 \qquad (4)$$

Note que d^2F^* es igual a $-3\left(k-\frac{4}{3}h\right)^2$, el cual contiene 1 término. Como estamos trabajando con 2 posibles incrementos, hay 2-1=1 dirección en la que $d^2F^*=0$, la cual es caracterizada por $k=\frac{4}{3}h$. Para verificar la afirmación reemplace esta identidad en (4). En principio aún no podemos garantizar la existencia de un máximo relativo. Sin embargo, aún no hemos incorporado la restricción al análisis, lo cual se hace usando que

$$d\varphi=0$$

	$x_0=\frac{3}{\sqrt{2}}, \quad y_0=\frac{4}{\sqrt{2}}$
$\varphi_x=\frac{2}{9}x$	$\varphi_x\left(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{4}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}$
$\varphi_y=\frac{1}{8}y$	$\varphi_y\left(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{4}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$$d\varphi=\frac{\sqrt{2}}{3}h+\frac{1}{2\sqrt{2}}k=0$$

$$h=-\frac{3}{4}k \qquad (5)$$

Reemplazando (5) en (4) resulta

$$d^2F^* = -3\left(k - \frac{4}{3}\left(-\frac{3}{4}k\right)\right)^2 = -3(2k)^2 = -12k^2 < 0$$

Ahora d^2F^* es igual a $-12k^2$, el cual contiene 1 término. Por otro lado, estamos trabajando con 2 posibles incrementos ligados por 1 relación. Luego coinciden la cantidad de términos (1) con la cantidad de variables incrementales libres (2-1=1).

Luego estamos en condiciones de afirmar que como $d^2F^* < 0$ estamos en presencia de un máximo relativo, esto es, el rectángulo inscripto en la elipse de dimensiones $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{4}{\sqrt{2}}$ es el de mayor área.