CALCULO II

Ingeniería Mecánica
Ingeniería Electromecánica

Equipo de Cátedra

Profesor Titular	Dr. Javier Gimenez
Profesor Adjunto	Dr. Emanuel Tello
Jefe de Trabajos Prácticos	Mg. Juan Pablo Llarena

AÑO 2024

EXTREMOS RELATIVOS

Introducción:

Los conceptos de extremos relativos en el cálculo multivariado representan un paso crucial en la comprensión de las funciones de varias variables y su comportamiento en puntos críticos. Para los estudiantes de segundo año de ingeniería, dominar estos fundamentos es esencial, ya que sientan las bases para aplicaciones prácticas en diversos campos de la ingeniería, desde la optimización de procesos hasta el diseño de sistemas complejos. En este conjunto de apuntes, exploraremos detalladamente los extremos relativos, analizando cómo identificarlos, clasificarlos y comprender su significado geométrico. A través de ejemplos concretos y técnicas de análisis rigurosas, buscamos proporcionar a los estudiantes las herramientas necesarias para abordar problemas reales y entender la importancia de los extremos relativos en el contexto de la ingeniería y otras disciplinas relacionadas.

Definiciones Intutivas

Sea $$z = x^2 + y^2 - 2x = (x-1)^2 + y^2 + 1$$

Esta superficie es un paraboloide trasladado una unidad en la dirección del eje z y el vértice del paraboloide está ubicado en el punto $(1,0,1)$. En este punto la función es menor que en cualquier otro punto próximo, luego podemos decir que en el punto del dominio $P_0(1,0)$ la función alcanza un valor mínimo (ver Figura 1)

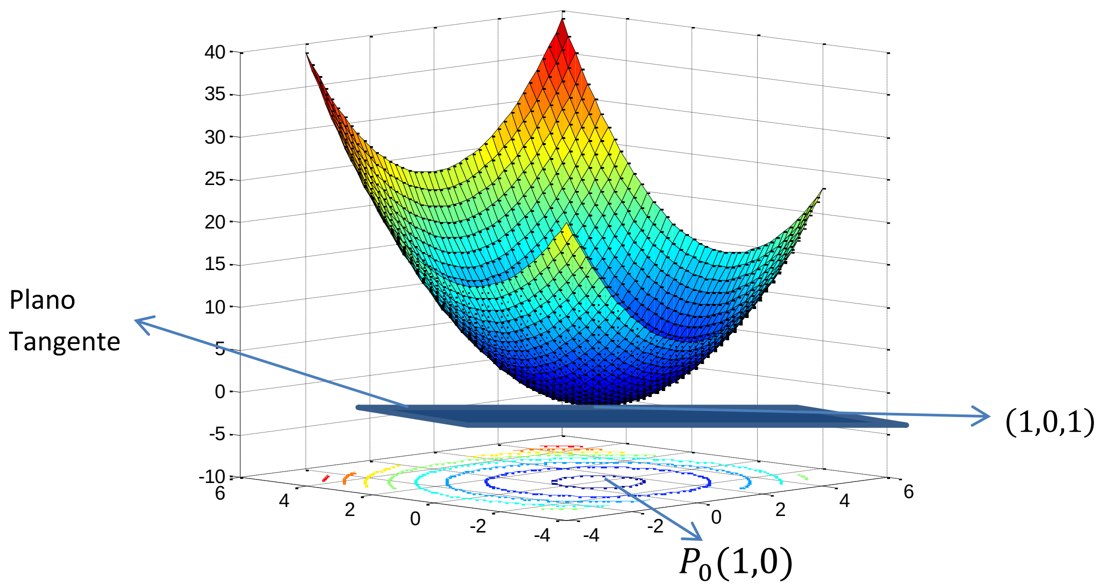


Figura 1: Gráfica de la superficie y de las curvas de nivel para distintas cotas z

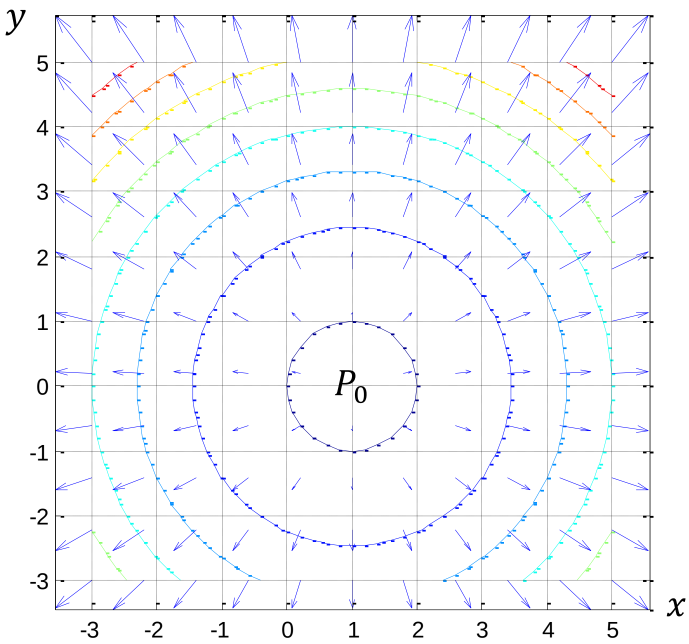


Figura 2: Gráfica de las curvas de nivel y gradientes

Observaciones

A) En la Figura 2 se observa que las curvas de nivel son circunferencias cuyo radio crece a medida que crece z.

También se han graficado vectores gradientes, los cuales tienen dirección radial. En este gráfico se observa la propiedad de que **el vector gradiente es perpendicular a las curvas de nivel.**

Además, se puede ver que las flechas que representan a los vectores gradientes apuntan hacia las cotas crecientes de z.

En el gráfico de las curvas de nivel y vectores gradientes se observa que en el punto $(1,0)$ el gradiente es nulo $\overrightarrow{\nabla f}(1,0) = \vec{0}$, y que el módulo de los vectores gradientes crece a medida que nos alejamos de este punto. Además, $z_0 = f(1,0) = 1$.

B) En el gráfico de la superficie de la Figura 1 se observa que el plano tangente a la superficie en el punto $(1,0,1)$ es paralelo al plano xy con ecuación $z = z_0$.

Luego, el vector normal al plano es paralelo al eje z y vale $\vec{n} = (0,0,1)$.

Anteriormente se vio que el vector normal a la superficie en un punto $\big(P_0, f(P_0)\big)$ viene dado por

$$\vec{n} = \left(-f_x(P_0), -f_y(P_0), 1\right)$$

Ambos vectores normales son paralelos, por lo que $f_x(P_0) = 0$ y $f_y(P_0) = 0$, resultado que coincide con lo visto gráficamente en A) respecto a que el vector gradiente en el punto P_0 es nulo.

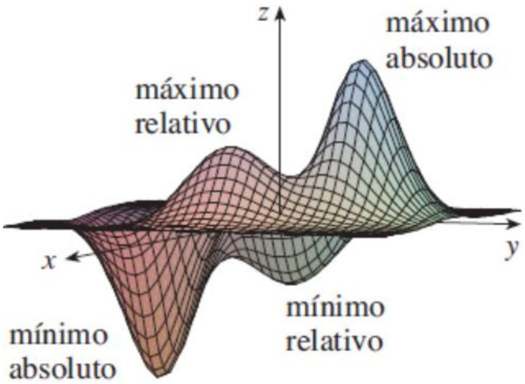


Figura 3: Puntos extremos

Observe las colinas y los valles en la gráfica de f mostrada en la Figura 3. Hay dos puntos del dominio donde f tiene un *máximo local*, es decir, la función en esos puntos es mayor que los valores que toma la función en los puntos cercanos. El mayor de estos valores es el ***máximo absoluto*.** Asimismo, la función tiene dos *mínimos locales*, donde la función es menor que en los puntos cercanos. El menor de estos dos valores es el ***mínimo absoluto***.

Resumiendo lo dicho hasta ahora podemos expresar las siguientes definiciones

DEFINICION DE PUNTOS ESTACIONARIOS

Si $z = f(x, y)$ es un campo escalar diferenciable con dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ entonces:

1) **Definición Analítica**

Un punto $P_0 \in D$ se llama *PUNTO ESTACIONARIO* sí, y sólo si, cumple $\overrightarrow{\nabla f}(P_0) = \vec{0}$

O equivalentemente sí, y sólo si, $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 0$

2) **Definición Geométrica**

Un punto $P_0 \in D$ se llama *PUNTO ESTACIONARIO* si y solo si el plano tangente a la superficie en $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ es paralelo al plano xy con ecuación $z = z_0$ siendo $z_0 = f(x_0, y_0)$

En resumen:

$$P_0 \text{ es un Punto Estacionario} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} f(P_0) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad df(P_0) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 0$$

Como se puede observar en la Figura 3, existen distintos tipos de puntos estacionarios. Si imaginamos el plano tangente en dichos puntos, el cual sabemos que es paralelo al plano xy, en algunos puntos el plano queda por debajo de la superficie (puntos mínimos) mientras que en otros el plano queda por encima de la superficie (puntos máximos). Esto se resume en las siguientes definiciones:

Definición (Puntos Extremos):

La función $z = f(x, y)$ tiene un punto extremo en P_0 sí, y sólo si, P_0 es un punto estacionario y en una vecindad $B(P_0, \varepsilon)$ de P_0 (Se lee: entorno con centro en P_0 y radio $\varepsilon > 0$) se cumple:

$a)$ si $\quad f(P) \leq f(P_0) \quad \forall P \in B(P_0, \varepsilon) \quad \Rightarrow \quad$ en P_0 hay un **máximo relativo**

y el valor $f(P_0)$ recibe el nombre de VALOR MAXIMO RELATIVO

$b)$ si $\quad f(P) \geq f(P_0) \quad \forall P \in B(P_0, \varepsilon) \quad \Rightarrow \quad$ en P_0 hay un **mínimo relativo**

y el valor $f(P_0)$ recibe el nombre de VALOR MÍNIMO RELATIVO

Observación

Cualquier punto P de un entorno $B(P_0, \varepsilon)$ de P_0 es el resultado de hacer un incremento $\Delta x = h$ desde x_0 y un incremento $\Delta y = k$ desde y_0, esto es

$$P = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \quad = \quad (x_0 + h, y_0 + k)$$

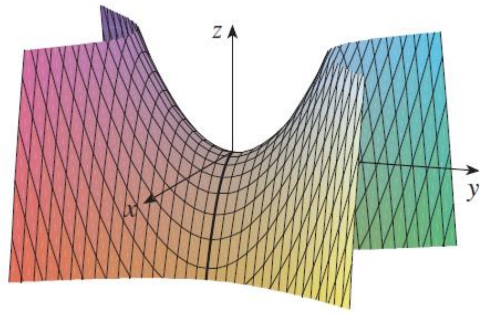
Luego la definición anterior se puede expresar de la siguiente manera

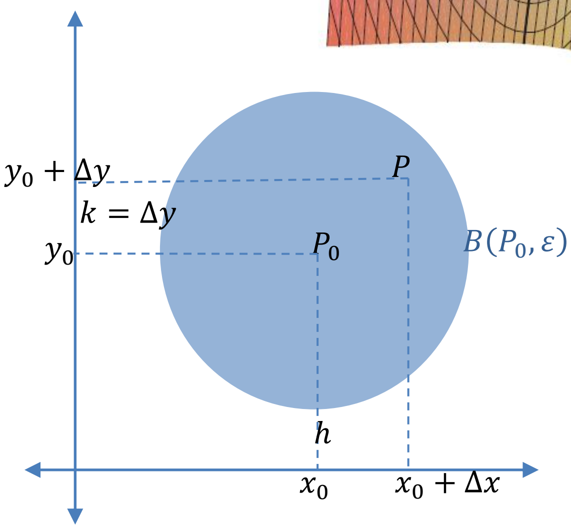
$$f(x_0 + h, y_0 + k) < f(x_0, y_0) \;\; \forall h, k \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta f(P_0) < 0$$
$$\Leftrightarrow \quad P_0 \text{ es un máximo relativo}$$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) > f(x_0, y_0) \;\; \forall h, k \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta f(P_0) > 0$$
$$\Leftrightarrow \quad P_0 \text{ es un mínimo relativo}$$

Ejemplo: Calcular los puntos estacionarios de la función $z = y^2 - x^2$

Solución: Por lo dicho anteriormente, para hallar los puntos estacionarios tenemos que encontrar las derivadas parciales e igualarlas a cero. Los valores de x e y que cumplan estas ecuaciones son los puntos estacionarios





$$\begin{cases} z_x = -2x = 0 \\ z_y = \ \ 2y = 0 \end{cases}$$

Los valores de x e y que verifican estas ecuaciones simultáneamente son $x = y = 0$. Además $f(0,0) = 0$.

Si observamos la gráfica de esta función vemos que:

Para puntos del plano xy ubicados sobre el eje x (los que cumplen que $y = 0$) tenemos que la función toma los valores $f(x, 0) = -x^2 \leq 0$.

Para $x = 0$ y distintos valores de y, esto es, para los puntos que se encuentran sobre el eje y, la función vale $f(0, y) = y^2 \geq 0$.

Como $f(0,0) = 0$ para puntos $P = (x, y)$ próximos al punto estacionario $P_0 = (0,0)$ tenemos que $\Delta f = f(P) - f(P_0)$ es positivo o negativo dependiendo la dirección adoptada, esto es, dependiendo de los valores elegidos para Δx y Δy.

Esto significa que P_0 no es punto extremo porque para puntos de un entorno de P_0 la función alcanza valores mayores a $f(P_0)$ y menores a $f(P_0)$.

Definición de Punto de Ensilladura o punto silla

Dado un campo escalar $z = f(x, y)$ y un punto P_0 de su dominio, decimos que en P_0 hay un punto de ensilladura si y solo si P_0 es un punto estacionario y además para algunos puntos próximos a P_0 se verifica que $f(P) > f(P_0)$ mientras que para otros puntos próximos a P_0 se verifica que $f(P) < f(P_0)$

Si lo analizamos geométricamente, en un entorno de P_0 el plano tangente a la superficie en $\left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right) = (0,0,0)$ deja parte de la superficie por encima y otra parte por debajo. En la gráfica se observa que cerca del punto $(0,0)$ la superficie tiene la forma de una silla de montar, y por ello se dice que P_0 es un punto silla o de ensilladura de f

Resumiendo:

Condición necesaria y suficiente de **Puntos Estacionarios** $f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$

Condición necesaria de **Extremos** $f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$

Teorema (Condición Suficiente de Extremos):

Si $z = f(x, y)$ es un campo escalar diferenciable hasta orden 2 como mínimo en un punto estacionario P_0, entonces se cumplen

- Si $d^2f > 0$ entonces P_0 es un mínimo
- Si $d^2f < 0$ entonces P_0 es un máximo
- Si $d^2f > 0$ o $d^2f < 0$ dependiendo de la dirección entonces P_0 es un punto de ensilladura.

Demostración: Como $f(x, y)$ es diferenciable hasta orden 2 como mínimo, entonces por el desarrollo de Taylor en un entorno de P_0 se tiene que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{d^2f(x_0, y_0)}{2} + \varepsilon \qquad (\star)$$

Luego, el incremento de la función viene dado por:

$$\Delta f = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \frac{d^2f(x_0, y_0)}{2} + \varepsilon$$

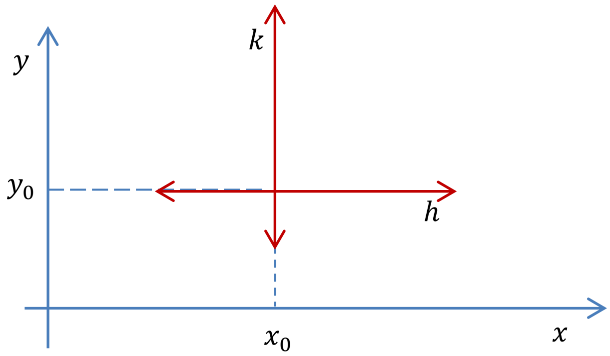
Como P_0 es un punto estacionario, resulta que $df(x_0, y_0) = 0$, y por lo tanto

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} d^2 f(x_0, y_0) + \varepsilon$$

Despreciando el error ε y desarrollando la expresión de la diferencial segunda obtenemos

$$\Delta f(x_0, y_0) \cong \frac{1}{2} d^2 f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\left(f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2\right)$$

La notación $\Delta x = h, \Delta y = k$ tiene sentido porque es como hacer un cambio de variables o una traslación de ejes quedando como origen de coordenadas el punto P_0. Luego cualquier valor que tome Δx a la derecha o izquierda de P_0 es como si en mi nuevo sistema de ejes h fuese positivo o negativo, respectivamente. Ídem para k en la dirección vertical.



Luego, como se consideran puntos (x, y) próximos a (x_0, y_0),

$$\text{si } d^2 f(x_0, y_0) > 0 \text{ entonces } \Delta f(x_0, y_0) > 0.$$

Del mismo modo,

$$\text{si } d^2 f(x_0, y_0) < 0 \text{ entonces } \Delta f(x_0, y_0) < 0.$$

Esto suele denotarse con

$$\text{sign}(\Delta f) = \text{sign}(d^2 f)$$

En esta notación se debe tener la precaución de que si $d^2 f = 0$ en alguna dirección entonces no necesariamente $\Delta f = 0$, ya que en este caso el signo del error ε deja de ser despreciable y se verifica que $\text{sign}(\Delta f) = \text{sign}(\varepsilon)$. Luego deben analizarse más término del desarrollo de Taylor $(\star)$ para clasificar el punto estacionario. Más adelante ejemplificaremos esta situación.

Reemplazando las siguientes constantes por la notación más compacta dada por:

$$f_{xx}(x_0, y_0) = A \quad , \quad f_{xy}(x_0, y_0) = B \quad , \quad f_{yy}(x_0, y_0) = C$$

la expresión del diferencial segunda no es otra que una expresión cuadrática en h y k

$$d^2 f(x_0, y_0) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 \qquad (*)$$

Si el signo de $d^2f(x_0, y_0)$ es el mismo para cualquier valor de h y k (cualquier dirección) entonces en (x_0, y_0) habrá un máximo o mínimo relativo dependiendo del signo, ya que para todo $(x, y) = (x_0 + h, y_0 + k)$ en un entorno de (x_0, y_0) se verifican:

$\Delta f(P_0) = f(x,y) - f(x_0, y_0) > 0 \Leftrightarrow f(x,y) > f(x_0, y_0) \Leftrightarrow$ en P_0 hay un mínimo relativo

$\Delta f(P_0) = f(x,y) - f(x_0, y_0) < 0 \Leftrightarrow f(x,y) < f(x_0, y_0) \Leftrightarrow$ en P_0 hay un máximo relativo

Por otro lado, si el signo de $d^2f(x_0, y_0)$ varía dependiendo de la dirección (depende de h y k) entonces $f(x,y) > f(x_0, y_0)$ para algunos punto de un entorno de P_0, y $f(x,y) < f(x_0, y_0)$ para otros puntos del mismo entorno. En resumen, en estas circunstancias en P_0 hay un punto de ensilladura.

Finalmente si existe algún punto del entorno distinto de P_0 para el cual $\Delta f(P_0) = 0$ (esto es: $f(x,y) = f(x_0, y_0)$), entonces se deben incorporar diferenciales de mayor orden en la aproximación de Taylor para analizar y desglosar mejor el signo del error ε.

En resumen: ***Pasos a seguir para determinar los puntos extremos***

1) Se determinan los puntos estacionarios resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

2) En cada uno de los puntos estacionarios se debe analizar el signo de Δf determinando el signo de la diferencial segunda. Para ello se debe completar cuadrados en la expresión cuadrática dada en (*), y determinar si d^2f es siempre (para cualquier valor de h y k) positivo o negativo. En tal caso, en el punto en cuestión hay un mínimo o máximo, respectivamente.

Si el signo de d^2f no se puede determinar ya que es positivo o negativo dependiendo de los valores de h y k considerados, entonces en el punto en cuestión hay un punto de ensilladura.

Si no se da ninguna de las condiciones anteriores, se deben incorporar diferenciales de mayor orden al análisis para poder clasificar al punto estacionario.

Ejemplo 1:

Hallar y clasificar los puntos estacionarios del campo escalar $z = x^2 + y^2$

1)

$$\begin{cases} f_x = 2x \quad \Rightarrow \quad 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \\ f_y = 2y \quad \Rightarrow \quad 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \end{cases}$$

En este sistema las ecuaciones son independientes, y, por ende, se resuelven por separado. Luego tenemos un único punto crítico o estacionario que será el punto $P_0(0,0)$.

2) Para analizar el signo de Δz se calcula el d^2z. Para ello se deben calcular las derivadas parciales segundas en el punto P_0 y luego construir la expresión del diferencial segunda

$$f_{xx}(x,y) = 2 \quad \Longrightarrow \quad f_{xx}(0,0) = 2$$

$$f_{xy}(x,y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f_{xy}(0,0) = 0$$

$$f_{yy}(x,y) = 2 \quad \Longrightarrow \quad f_{yy}(0,0) = 2$$

Entonces

$$\Delta z \cong d^2f(P_0) = 2h^2 + 2k^2 > 0 \text{ cualquier sea el valor de } h \text{ y } k \text{ distintos de cero}$$

Luego se puede concluir que en el punto $P_0(0,0)$ la función tiene un mínimo y el mínimo valor de la función será $f(0,0) = 0$.

Note que $d^2f(P_0)$ es igual a $2h^2 + 2k^2$, expresión que cuenta con 2 términos. Esta cantidad coincide con la cantidad de variables incrementales (h y k). Esto debe verificarse siempre para evitar que exista alguna dirección en la que $d^2f(P_0) = 0$ como veremos más adelante.

Ejemplo 2:

Hallar los puntos extremos del campo escalar $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 10$

1) Cálculo de los puntos estacionarios:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x + 2y + 2 = 0 & \Rightarrow & 4x - 2x + 2 = 0 & \Rightarrow & x = -1 \\ & & \Uparrow & & \Downarrow \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x + 2y = 0 & \Rightarrow & y = -x & \Rightarrow & y = 1 \end{cases}$$

Luego en este ejemplo existe un único punto estacionario $P_0(-1,1)$

2) Clasificación del punto estacionario

Se debe calcular la diferencial segunda en ese punto y analizar el signo de Δz. Esto significa que se calculan las derivadas parciales segundas y luego se evalúan en el punto estacionario hallado

	$P_0(-1{,}1)$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4$	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(P_0) = 4$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial xy} = 2$	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial xy}(P_0) = 2$
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$	$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}(P_0) = 2$

Luego

$$d^2f(P_0) = 4\,h^2 + 2.2hk + 2k^2 = 4\,h^2 + 4hk + 2k^2$$

Necesitamos determinar el signo de esta expresión para cualquier valor de h y k. A diferencia del ejemplo anterior, en este caso aparece el término cruzado que nos impide determinar el signo de $d^2f(P_0)$ a simple vista. Nos planteamos entonces hacerlo desaparecer de la expresión, y para ello, se propone completar cuadrados. Para ello debemos sumar y restar una expresión de tal manera que aparezca un trinomio cuadrado perfecto. Antes de completar cuadrados se recomienda sacar factor común el coeficiente del término cuadrático de cualquiera de las dos variables (h ó k).

$$\begin{aligned} d^2f(P_0) &= 4h^2 + 4hk + 2k^2 \\ &= 4\,(h^2 + hk) + 2k^2 \\ &= 4\left(h^2 + hk + \frac{1}{4}k^2 - \frac{1}{4}k^2\right) + 2k^2 \\ &= 4\left(h^2 + hk + \frac{1}{4}k^2\right) - k^2 + 2k^2 \\ &= 4\left(h + \frac{1}{2}k\right)^2 + k^2 > 0 \qquad \forall h\ \forall k \end{aligned}$$

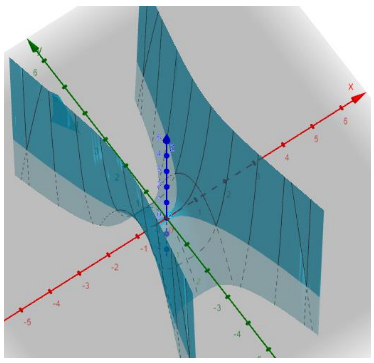
Esto significa que en el punto $P_0(-1{,}1)$ la función **alcanza un mínimo** por ser $\text{sign}(\Delta z) = \text{sign}(d^2z) > 0$.

El valor mínimo de la función será $f(P_0) = -11$

Note nuevamente que $d^2f(P_0)$ depende de 2 términos, cantidad que coincide con la cantidad de variables incrementales (h y k). El próximo ejemplo tiene como fin explicar que sucede cuando estas cantidades no son iguales.

Ejemplo 3: Hallar y clasificar los puntos críticos de

$$f(x,y) = x^4 - y^2$$



1) Cálculo de los puntos estacionarios:

$$\begin{cases} f_x = 4x^3 = 0 & \Rightarrow & x = 0 \\ f_y = -2y = 0 & \Rightarrow & y = 0 \end{cases}$$

Luego en este ejemplo existe un único punto estacionario $P_0(0,0)$

2) Clasificación del punto estacionario.

Completemos el cuadro con las derivadas de segundo orden:

	$P_0(0,0)$
$f_{xx} = 12x^2$	$f_{xx}(P_0) = 0$
$f_{xy} = 0$	$f_{xy}(P_0) = 0$
$f_{yy} = -2$	$f_{yy}(P_0) = -2$

Luego

$$d^2f(P_0) = 0h^2 + 2.0hk - 2k^2 \; = \; -2k^2 \; \leq \; 0$$

Se considera el $\leq$ en lugar del $<$ porque no aparece h. Note que $d^2f(P_0)$ depende de 1 término, y que sin embargo, la cantidad de variables incrementales es 2 (h y k). Esto implica que si nos movemos en la dirección del eje x ($k = 0$), resulta que $d^2f(P_0) = 0$, y por ende no se verifica que $d^2f(P_0) < 0$ en cualquier dirección, esto es, para cualquier valor no nulo de h y k.

En este contexto, es que debemos incorporar al análisis términos de mayor orden en la aproximación de Taylor $(\star)$ para saber si la función crece o decrece en la dirección del eje x.

$$\Delta f = df(x_0, y_0) + \frac{d^2f(x_0, y_0)}{2} + \frac{d^3f(x_0, y_0)}{3!} + \varepsilon$$

Con

	$P_0(0,0)$
$f_{xxx} = 24x$	$f_{xxx}(P_0) = 0$
$f_{xxy} = f_{xyy} = 0$	$f_{xxy}(P_0) = f_{xyy}(P_0) = 0$
$f_{yyy} = 0$	$f_{yyy}(P_0) = 0$

$$d^3f(P_0) = f_{xxx}(P_0)h^3 + 3f_{xxy}(P_0)h^2k + 3f_{xyy}(P_0)hk^2 + f_{yyy}(P_0)k^3 = 0$$

Vemos que el diferencial tercero no da información extra sobre el signo de Δf. Por este motivo incorporamos el diferencial cuarto de la función.

$$\Delta f = df(x_0, y_0) + \frac{d^2f(x_0, y_0)}{2} + \frac{d^3f(x_0, y_0)}{3!} + \frac{d^4f(x_0, y_0)}{4!} + \varepsilon$$

Con

	$P_0(0{,}0)$
$f_{xxxx} = 24$	$f_{xxxx}(P_0) = 24$
$f_{xxxy} = f_{xxyy} = f_{xyyy} = 0$	$f_{xxxy}(P_0) = f_{xxyy}(P_0) = f_{xyyy(P_0)} = 0$
$f_{yyyy} = 0$	$f_{yyyy}(P_0) = 0$

$$d^4f(P_0) = f_{xxxx}(P_0)h^4 + \text{ceros} \ldots = 24h^4$$

Luego

$$\Delta f \cong \underbrace{df(x_0,y_0)}_{=0} + \frac{1}{2}\underbrace{d^2f(x_0,y_0)}_{=-2k^2} + \frac{1}{6}\underbrace{d^3f(x_0,y_0)}_{=0} + \frac{1}{24}\underbrace{d^4f(x_0,y_0)}_{=24h^4}$$

$$= -2k^2 + 24h^4 \gtrless 0$$

Por lo tanto necesitamos hasta el diferencial cuarto para darnos cuenta que el signo de Δf depende de la dirección en la que nos movemos, esto es, depende del valor de h y k considerado.

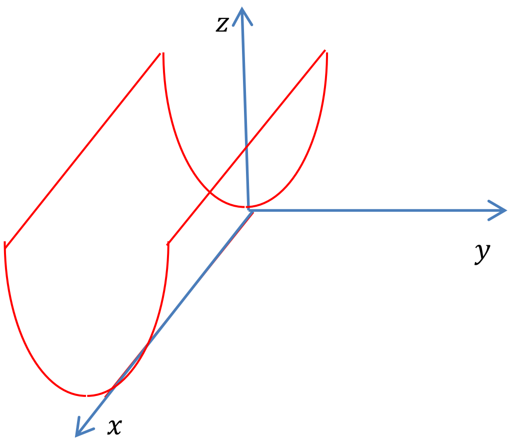
Por lo tanto, en P_0 hay un punto de ensilladura.

***Ejemplo 4*:** También suele suceder que en **una dirección** la superficie se mantenga constante generando múltiples puntos extremos, a los cuales se los conoce como casi máximos o casi mínimos.

Sea $z = y^2$ cuya gráfica es la mostrada en la figura. Luego

$$z_x = 0 \quad , \quad z_y = 2y = 0$$

Al calcular las derivadas parciales e igualarlas a cero, concluimos que $y = 0$, pero no obtenemos ningún valor particular para x. Tal y como se ve en la figura, esto significa que x puede tomar cualquier valor. En otras palabras, existe una dirección (eje x) para la cual la función se mantiene constante en su valor mínimo.



Si fijamos arbitrariamente cualquiera de sus puntos críticos, los cuales son de la forma $P_0 = (x_0, 0)$ resulta que el diferencial segundo viene dado por

	$P_0(x_0, 0)$
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(P_0) = 0$
$\frac{\partial^2 z}{\partial xy} = 0$	$\frac{\partial^2 z}{\partial xy}(P_0) = 0$
$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$	$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(P_0) = 2$

$$d^2f(P_0) = 0h^2 + 0hk + 2k^2 = 2k^2 \geq 0$$

Note que nuevamente $d^2f(P_0) = 2k^2$ no depende de h, e incluso cuenta con 1 solo término siendo que hay 2 variables incrementales (h y k). Esto hace que si desde P_0 nos movemos en la dirección del eje x (donde $k = 0$) entonces $d^2f(P_0) = 0$. Nuevamente la condición necesaria y suficiente para la existencia de un extremo relativo no se puede usar para clasificar el punto crítico, y debemos analizar términos de mayor orden en el desarrollo de Taylor. Sin embargo, en este caso, todas las derivadas de orden superior son nulas, y por ende, no tiene sentido continuar con el análisis de signo. La conclusión es entonces que, en este caso, sobre el eje x hay un casi mínimo.