CALCULO II

Ingeniería Mecánica
Ingeniería Electromecánica

Equipo de Cátedra

Profesor Titular	Dr. Javier Gimenez
Profesor Adjunto	Dr. Emanuel Tello
Jefe de Trabajos Prácticos	Mg. Juan Pablo Llarena

AÑO 2024

DERIVADAS SUCESIVAS

Ejemplo 1: Dado el campo escalar $z = x^3 y$. Calcular las derivadas parciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3$$

Las derivadas parciales son campos escalares que dependen de las mismas variables que z, esto es, son funciones de (x, y) a las cuales también se les puede calcular las derivadas parciales respecto de x e y**.** A los posibles resultados de estas nuevas derivadas se las denomina derivadas segundas de la función original. En el ejemplo:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 y) = 6xy$$

Se lee derivada segunda de z respecto de x dos veces.

Análogamente, la derivada segunda de z respecto de y dos veces será

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(x^3) = 0$$

Pero como las derivadas parciales son funciones de x e y, también se pueden calcular

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 y) = 3x^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3) = 3x^2$$

Estas nuevas funciones reciben el nombre de derivadas cruzadas, las cuales, si existen y son continuas, entonces son iguales. Este resultado se conoce como Teorema de Clairaut.

Este proceso de derivación sucesiva se puede continuar tanto como se quiera, siempre que la función lo permita.

DIFERENCIAL

Repaso

En Cálculo I se estudió el concepto de diferencial de una función de una variable $y = f(x)$ en x_0 dado por la expresión

$$dy = f'(x_0)dx \qquad (1)$$

y el concepto de incremento de la función en x_0 dado por

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Se suelen usar las notaciones df y Δf en lugar de dy y Δy, respectivamente.

Ambos conceptos se relacionan a través de la identidad

$$\Delta y = dy + \varepsilon$$

donde ε es el error que se comete al aproximar la función en un punto $x = x_0 + \Delta x$ cercano (Δx chico) usando la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P = \big(x_0, f(x_0)\big)$ tal y como lo diagrama la Figura 1.

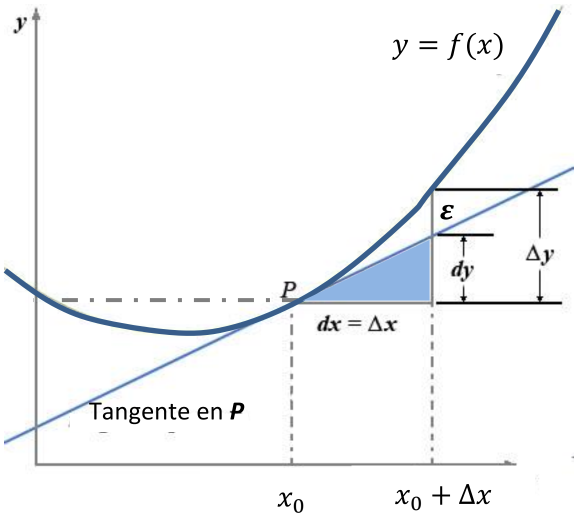


Figura 1

Note que tanto la función como la recta tangente toman el mismo valor sobre x_0. Esto deja de suceder si nos movemos una cantidad Δx hasta el punto $x_0 + \Delta x$, donde hay un error ε entre la función y la recta tangente. La recta es una aproximación lineal de la curva en un entorno de x_0. Luego, el valor de la recta en $x_0 + \Delta x$ es una aproximación lineal numérica de $f(x_0 + \Delta x)$.

A partir de (1) se puede observar que en Cálculo I el concepto de función diferenciable es equivalente al concepto de función derivable.

Veamos que sucede en campos escalares de varias variables independientes

Definiciones

Para el caso $n = 2$, el incremento de una función $z = f(x, y)$ en $P_0(x_0, y_0)$ se denota con Δz o Δf y se define como:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Por ejemplo, si el campo es $z = f(x, y) = x^2 + y^2$, entonces

$$\Delta z = \underbrace{(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2}_{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)} - \underbrace{(x_0^2 + y_0^2)}_{f(x_0, y_0)}$$

$$\Delta z = x_0^2 + 2.x_0.\Delta x + (\Delta x)^2 + y_0^2 + 2.y_0.\Delta y + (\Delta y)^2 - x_0^2 - y_0^2$$

Luego simplificando y ordenando la expresión obtenemos:

$$\Delta z = \underbrace{2.x_0}_{\frac{\partial z}{\partial x}(P_0)} .\Delta x + \underbrace{2.y_0}_{\frac{\partial z}{\partial y}(P_0)} .\Delta y + \underbrace{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}_{\varepsilon = \rho^2}$$

Si observamos esta expresión vemos que coincide con

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}(P_0).\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(P_0).\Delta y + \varepsilon \qquad (2)$$

donde ε es el término de error que satisface que $\frac{\varepsilon}{\rho} = \frac{\rho^2}{\rho} = \rho \to 0$ cuando $\rho \to 0$.

Por definición, como x e y son variables independientes, se cumple que $\Delta x \equiv dx \quad \Delta y \equiv dy$

A la parte lineal en Δx y Δy se le denomina diferencial de z, esto es

$$dz(P_0) = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} dx + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} dy \qquad (3)$$

Como (2) y (3) valen para cualquier punto P_0, resultan las siguientes identidades funcionales

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy \qquad (4)$$

$$\Delta z = dz + \varepsilon \qquad (5)$$

Interpretación Geométrica

En la Fig. 3 se diagrama en rojo la gráfica de la función $z = f(x, y)$, en negro el plano tangente, y se sombrea con celeste y verde dos de las caras del sólido con piso en el plano xy, techo la superficie roja, y paredes paralelas a los planos coordenados (ver la figura para más detalles).

En Cálculo I se interpretó geométricamente a dy en x_0 como el valor del cateto vertical del triángulo celeste diagramado en la Fig. 1, el cual aplicando razones trigonométricas resulta valer

$$dy = f'(x_0)dx$$

Si se aplica este mismo análisis, pero mirando solamente la cara celeste del sólido, se puede ver que la altura del triángulo resaltado en celeste en la Fig. 2 es igual a $f_x(P_0)dx$, ya que la pendiente de la recta tangente (graficada con negro sobre la cara celeste) en la dirección del eje x es igual a $f_x(P_0)$.

Análogamente, pero mirando solamente la cara verde del sólido, se puede ver que el segmento resaltado en verde en la Fig. 2 es igual a $f_y(P_0)dy$, ya que la pendiente de la recta tangente (graficada con negro sobre la cara verde) en la dirección del eje y es igual a $f_y(P_0)$. Note que en este caso la base del triángulo es igual a dy.

En general, con las rectas tangentes negras se forma el plano tangente diagramado en negro en la Fig. 2. De este modo, el segmento negro diagramado en la cara del fondo es paralelo al segmento negro diagramado en la cara del frente. Luego realizando proyecciones geométricas se pueden dibujar sobre la cara posterior un segmento verde y un segmento celeste con la misma medida que los mencionados anteriormente. Al poner estos dos segmentos uno a continuación del otro se forma un segmento que mide $dz = f_x(P_0)dx + f_y(P_0)dy$. Esta longitud es exactamente la altura que incrementa el plano tangente al moverse del punto P_0 al punto P que se forma con los incrementos.

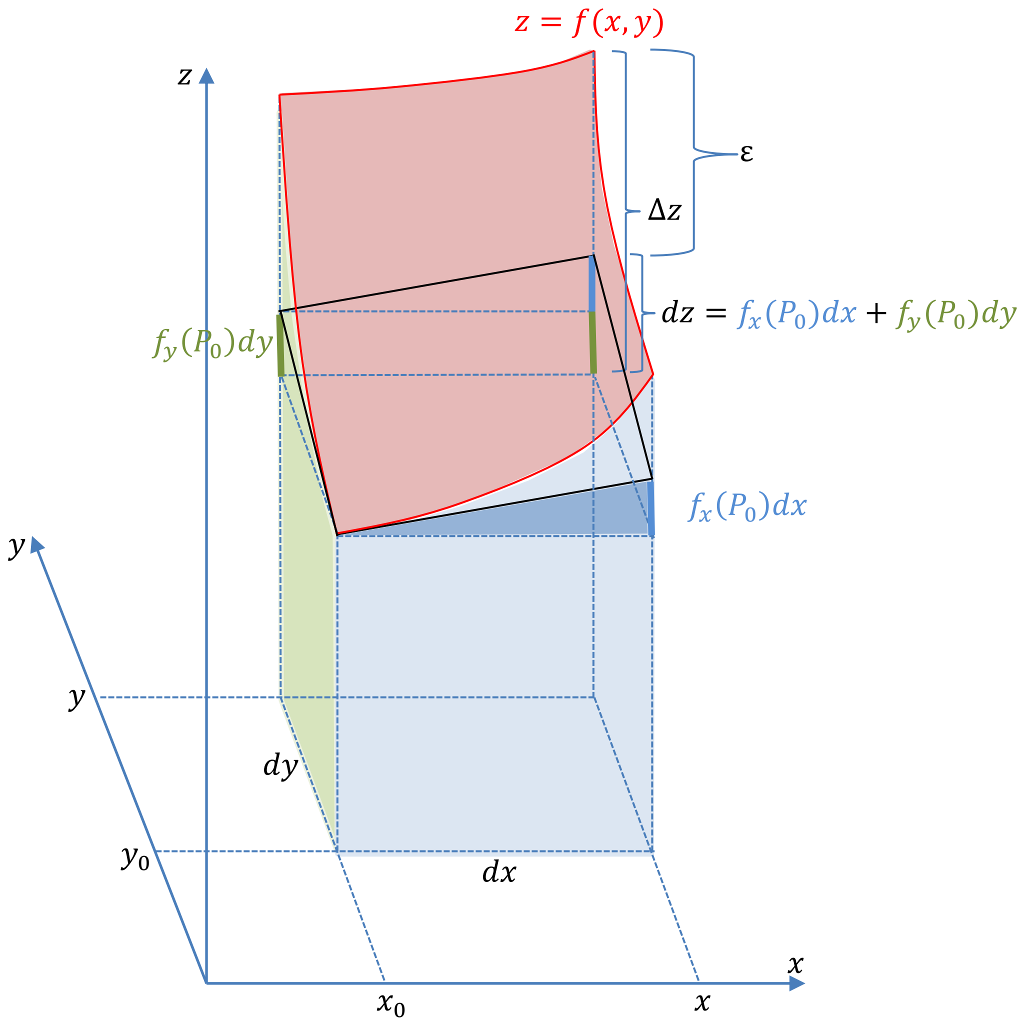


Figura 2

En resumen: Así como en Cálculo I la diferencia entre Δy y dy es el error que se comete al estimar con la recta tangente al valor de la función en un punto x cercano a x_0; en Cálculo II la diferencia entre Δz y dz es el error que se comete al estimar con el plano tangente el valor de la función en un punto P cercano a P_0

Luego, de (5) resulta que en un entorno de P_0

$$\Delta z \approx dz$$

$$f(x,y) - \underbrace{f(x_0,y_0)}_{z_0} \approx f_x(P_0)(x-x_0) + f_y(P_0)(y-y_0)$$

$$f(x,y) \approx z_0 + f_x(P_0)(x-x_0) + f_y(P_0)(y-y_0)$$

Es decir: en un entorno de $P_0(x_0,y_0)$ la superficie se puede aproximar con un plano y el error será menor mientras más cerca esté $P(x,y)$ de P_0. Este plano se lo conoce como plano tangente y su ecuación viene dada por

$$z = z_0 + f_x(P_0)(x-x_0) + f_y(P_0)(y-y_0)$$

que escrita de otra forma es

$$-f_x(P_0)(x-x_0) - f_y(P_0)(y-y_0) + (z-z_0) = 0$$

Esta es la ecuación normal de un plano cuyo vector normal es

$$\vec{n} = \left(-f_x(P_0), -f_y(P_0), 1\right)$$

De esta manera, especificado el punto P_0, se puede calcular la ecuación del plano tangente mediante el cálculo del vector normal a la superficie en el punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ (Ver Figura 2).

Todo este análisis y la definición de plano tangente se pudieron realizar gracias a que la función es diferenciable.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN DIFERENCIABLE: Se dice que una función $f(x,y)$ es diferenciable en un punto $P_0(x_0,y_0)$ si en una cercanía de P_0 el incremento de la función se puede escribir como

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = dz + \varepsilon$$

donde

$$dz = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} dx + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} dy$$

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\varepsilon}{\rho} = 0$$

siendo $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Si la función es diferenciable en todos los puntos de su dominio, entonces se dice que la función es diferenciable.

Propiedad: (Linealidad del diferencial) Dadas dos funciones diferenciables $z = f(x, y)$, $z = g(x, y)$, y dos constantes a y b, se verifica

$$d(a. f + b. g) = a. df + b. dg$$

Para demostrar este resultado se usa (4) y que $a. f + b. g$ es una función de dos variables cuyas derivadas parciales se obtienen a partir de las derivadas parciales de las funciones f y g.

Nuevamente el concepto de función diferenciable significa que se le puede calcular su diferencial, y que el mismo aproxima lo suficientemente bien a su incremento. Por otro lado, el concepto de función derivable se utiliza para decir que la función tiene derivadas parciales.

Estos conceptos no son equivalentes tal como lo indican los siguientes Teoremas y el diagrama mostrado en la Figura 3, donde además se incluyen funciones que sirven de contraejemplos.

Teorema 1: (Diferenciabilidad implica continuidad y derivabilidad)
Toda función diferenciable es continua y derivable

Teorema 2: (Condición suficiente de diferenciabilidad)
Toda función continua con derivadas parciales primeras continuas es diferenciable

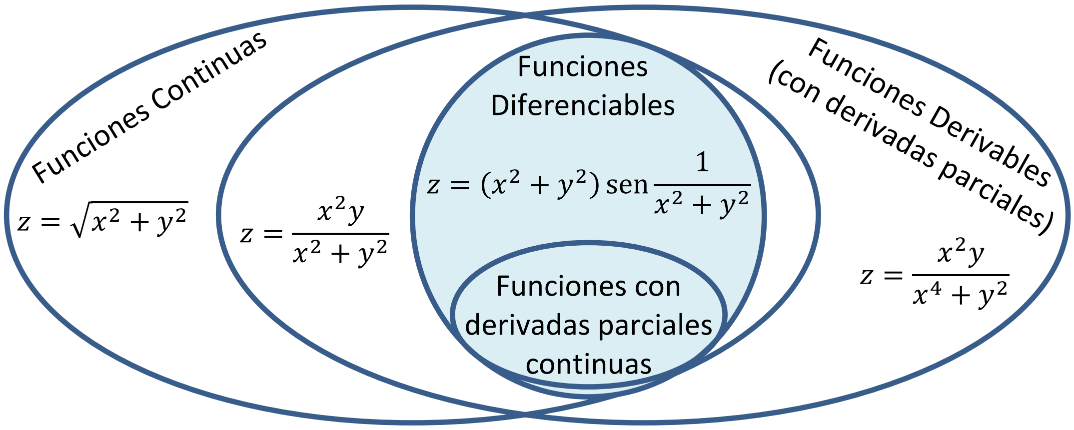


Figura 3: Diagrama que relaciona las clasificaciones de funciones considerando $n = 2$ y $P_0(0,0)$

En la práctica se trabaja generalmente con funciones con derivadas parciales continuas, y por ende Diferenciables.

Regla de la Cadena

La regla de la cadena para funciones de una sola variable indica que si $y = f(x)$ es una función de x diferenciable, y $x = g(t)$ es una función de t diferenciable, entonces la derivada de la función compuesta $y = f(x(t))$ es

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

En esta sección se extiende la regla de la cadena a funciones de varias variables.

Regla de la cadena para campos escalares de más de una variable

Sea $z = f(x, y)$ donde $x = X(u, v)$, $y = Y(u, v)$

Entonces z es función de u y v

$$z = f(X(u, v), Y(u, v)) = Z(u, v)$$

Vamos a calcular $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$. Para ello suponemos que Z es una función diferenciable, luego se cumple

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \varepsilon \quad \text{tal que} \quad \lim_{\rho \to 0}\frac{\varepsilon}{\rho} = 0 \qquad \text{siendo} \quad \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Dividiendo miembro a miembro por Δu y tomando límite para $\Delta u \to 0$ se tiene

$$\lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta u} + \lim_{\Delta u \to 0}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta u} + \lim_{\Delta u \to 0}\frac{\varepsilon}{\Delta u}$$

$$\underbrace{\lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta Z}{\Delta u}}_{\frac{\partial z}{\partial u}} = \frac{\partial f}{\partial x}\underbrace{\lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta u}}_{\frac{\partial x}{\partial u}} + \frac{\partial f}{\partial y}\underbrace{\lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}}_{\frac{\partial y}{\partial u}} + \underbrace{\lim_{\Delta u \to 0}\frac{\varepsilon}{\rho}}_{\to 0}\lim_{\Delta u \to 0}\frac{\rho}{\Delta u}$$

Donde $\lim_{\Delta u \to 0}\frac{\rho}{\Delta u}$ existe, pues

$$\lim_{\Delta u \to 0}\frac{\rho}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0}\frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta u}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\frac{\partial Z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}}$$

Análogamente se puede demostrar que

$$\boxed{\frac{\partial Z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}}$$

Generalizando

Sea $z = Z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y además

$$x_i = X_i(u_1, u_2, \dots, u_m)$$

Entonces la función compuesta será

$$z = Z\big(X_1(u_1, u_2, \dots, u_m), X_2(u_1, u_2, \dots, u_m), \dots, X_n(u_1, u_2, \dots, u_m)\big)$$

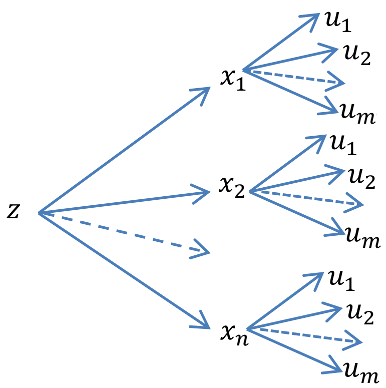
$$z = g(u_1, u_2, \dots, u_m)$$

Suponiendo que Z y X_i son funciones diferenciables entonces se cumple

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial u_i} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial X_1}{\partial u_i} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial X_2}{\partial u_i} + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial X_n}{\partial u_i}}$$

En esta expresión aparece la suma de n términos, tal que cada término es el producto de la derivada parcial de la función Z respecto a los argumentos intermedios x_j por la derivada parcial del argumento x_j respecto de la variable a derivar.

Resulta más sencillo si tenemos en cuenta la dependencia mediante un diagrama de árbol



Se deben recorrer todos los caminos que lleven a u_i derivando con respecto a los argumentos intermedios. El resultado será la suma de todos los caminos que me llevan a u_i y en cada camino el producto de las derivadas de cada tramo.

Ejemplo 1: Hallar $\frac{\partial z}{\partial u}$ siendo $z = x^2 + y^2$ con $\begin{cases} x = \ln(u^2 + v^2) \\ \\ y = \cos(u + 2v) \end{cases}$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2x \, . \frac{2u}{u^2 + v^2} + 2y \, \mathrm{sen}(u + 2v)$$

Funciones Implícitas

Hay expresiones de la forma $F(x, y, z) = 0$ de las cuales no puede obtenerse una expresión de la forma explícita $z = f(x, y)$. Por ejemplo, si

$$F(x, y, z) = z^2 \cos(2x + y) - e^{z-1} - 2z + 2 = 0$$

entonces no es posible despejar a z en función de x e y. Sin embargo, existe un conjunto de puntos (x, y, z) que satisface esta igualdad, y que al graficarlos todos juntos conforman una superficie en el espacio tridimiensional. La Figura 3 muestra la gráfica de la función implícita dada, en la cual ambas superficies corresponden a la misma función.

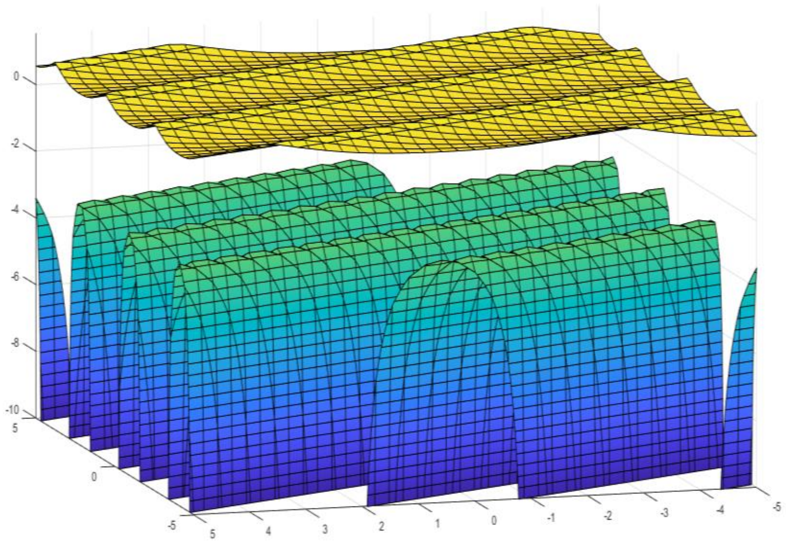


Figura 3

Aunque no puedo explicitarla de la forma $z = f(x, y)$, se pueden calcular sus derivadas parciales siempre que se cumplan determinadas condiciones que se deducirán a continuación.

Sea $F(x, y, z) = 0$ (1) que define implícitamente a $z = f(x, y)$ hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\begin{tikzcd}
 & x & \\
F \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & y & x \\
 & z \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & y
\end{tikzcd}$$

Derivando ambos miembros de (1) con respecto a x teniendo en cuenta la regla de la cadena, resulta:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Despejando $\frac{\partial z}{\partial x}$ tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

O escrito en la otra notación de derivada parcial es

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} \qquad \text{análogamente} \qquad z_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

Para que estas derivadas existan en un punto (x_0, y_0) es necesario que $u = F(x, y, z)$ sea diferenciable en $\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ y que $F_z\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big) \neq 0$

Aplicaciones Geométricas

Ecuaciones del Plano Tangente y Recta Normal

a) Si la función está expresada en forma explícita como $z = f(x, y)$:

Como ya vimos. en la clase anterior , la ecuación del plano tangente a una superficie en el punto $P_0(x_0, y_0)$ está dada por

Plano Tangente $\quad z - z_0 = f_x(P_0).(x - x_0) + f_y(P_0).(y - y_0)$

Vector Normal $\quad \vec{n} = \big(-f_x(P_0), -f_y(P_0), 1\big)$

Recta Normal $\quad \vec{P} = \vec{P}_0 + \lambda\vec{n}$

b) Si la función está expresada en forma implícita como $F(x, y, z) = 0$:

Si está definida en forma implícita construimos una función auxiliar

$$u = F(x, y, z)$$

Sabemos que para valores constantes de u tenemos los distintos conjuntos de nivel (superficies), en particular para $u = 0$, que es la ecuación dada.

Luego por propiedad del gradiente sabemos que el $\overrightarrow{\nabla u} \perp CN$, esto es, el vector $\overrightarrow{\nabla u}$ será perpendicular al conjunto de nivel $u = 0$, la cual es la superficie que grafica a la función implícita. Por lo tanto, el vector $\overrightarrow{\nabla u}$ es perpendicular al plano tangente a la superficie en el punto $A(x_0, y_0, z(x_0, y_0))$

Plano Tangente $\quad F_x(A).(x - x_0) + F_y(A).(y - y_0) + F_z(A).(z - z_0) = 0$

Vector Normal $\quad \vec{N} = (F_x(A), F_y(A), F_z(A))$

Ejemplo: Sea $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $A(2,1,2)$

- Primero se calcula el vector normal en dicho punto para luego escribir la ecuación del plano tangente

$$F_x = 2x \qquad F_y = 2y \qquad F_z = 2z$$

$$\vec{N} = (4,2,4)$$

Luego la ecuación del plano tangente será

$$4.(x - 2) + 2.(y - 1) + 4.(z - 2) = 0$$

Ejercicio: Hallar la ecuación paramétrica de la recta normal.

Cálculo Aproximado usando el concepto de diferencial

Una de las aplicaciones más importantes del diferencial es el cálculo aproximado del valor de la función en un punto próximo a uno dado.

Valor exacto: $\quad f(P) = f(P_0) + \Delta f$

Pero como aproximamos el incremento con el diferencial o sea $\Delta f \cong df$ tenemos

Valor Aproximado: $\quad f(P) \cong f(P_0) + df$

Ejemplo 1: Aproxime $z = f(P) = f(x, y) = x^2 + y^2$ en las cercanías del punto $P_0(1,2)$. Compare con el valor exacto para dichos puntos

a) Debo calcular el dz en el punto P_0. Para ello calculo primero las derivadas parciales en el punto

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} = 2x|_{P_0} = 2 \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} = 2y|_{P_0} = 4$$

b) El valor del diferencial en el punto es

$$dz = 2dx + 4dy$$

c) De (3), el valor aproximado de la función en un punto $P(x, y)$ cercano a P_0 es

$$z \cong z_0 + dz$$

Como $z_0 = f(P_0) = 1 + 4 = 5$, $\Delta x = dx = x - 1$, $\Delta y = y - 2$, reemplazando en (3) se tiene

$$f(x, y) \cong 5 + 2dx + 4dy$$

$$f(x, y) \cong 5 + 2(x - 1) + 4(y - 2)$$

Podemos calcular el valor aproximado de la función para distintos valores de (x, y) y comparar con el valor exacto. Recordando que $z = x^2 + y^2$ completar el siguiente cuadro

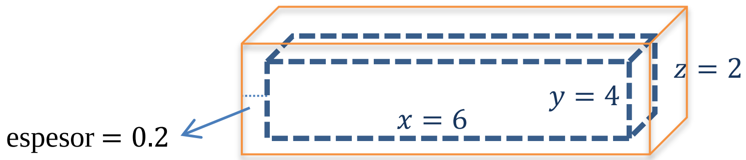
x	y	z	z_T	Error
1	2	5	5	0
1.1	2	5.21	5.2	0.01
1.1	1.9	4.82	4.8	0.02
4	3	25	15	10

Podemos observar que para puntos más próximos a P_0 el error es menor.

Ejemplo 2: Se desea construir un cajón cerrado, con dimensiones interiores 6, 4, 2 dm, utilizando chapa metálica de 2 mm de espesor. Se pide:

2.1. Cálculo del Volumen exacto del metal precisado.

2.2. Cálculo del Volumen aproximado, utilizando el concepto de diferencial. ¿Qué error se comete?



Solución: Como sabemos el volumen de una caja es Vol = largo . ancho . alto, que expresado como función resulta

$$V(x, y, z) = x.y.z$$

En este caso, la función es de tres variables pero todo lo dicho anteriormente se puede extender fácilmente para n variables

$$\Delta V = V(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - V(x, y, z)$$

$$dV(P_0) = V_x(P_0)dx + V_y(P_0)dy + V_z(P_0)dz$$

En este caso $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 2 * 0.02 = 0.04$ dm

2.1 La cantidad de material necesario para realizar el cajón será la diferencia entre el volumen exterior (cuyas dimensiones son las dimensiones del interior más el espesor) y el volumen interior (cuyas dimensiones son las dadas)

$$V(\text{del material del cajón}) = V_{ext} - V_{int} = \Delta V$$

Entonces la cantidad de material exacta para realizar el cajón será

$$\Delta V = V(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - V(x, y, z)$$

$$\Delta V = (x + 0.04).(y + 0.04).(z + 0.04) - x.y.z$$

$$\Delta V = 6.04 * 4.04 * 2.04 - 48 = 1.779264$$

2.2 Volumen aproximado

$$\Delta V \cong dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

$$dV = yzdx + xzdy + xydx$$

Reemplazando por los valores correspondientes

$$dV = 4 * 2 * 0.04 + 6 * 2 * 0.04 + 6 * 4 * 0.04 = 1.76$$

El error será $\varepsilon = \Delta V - dV = 1.779264 - 1.76 = 0.019264$

El error puede ser positivo o negativo según si la aproximación es por exceso o por defecto

Nota: En el caso que se quiera construir un cajón sin tapa lo único que varía es el valor asignado a Δz. ¿Cuál es su valor?

Diferenciales Sucesivas

El valor del diferencial de una función depende del punto genérico P_0 en el cual se calcula y de los incrementos que se le apliquen a cada una de las variables independientes. Por ejemplo, si la función es $z = f(x, y)$ entonces dz depende de x_0, y_0, Δx, Δy.

El concepto de diferencial se utiliza para aproximar a la función en un punto $P(x, y)$ cercano a P_0, esto es, aproximar $f(P)$ sumando $f(P_0)$ más $dz(P_0)$ que es una función de los incrementos y del valor de las derivadas parciales de la función en cuestión.

Ahora, manteniendo fijo el punto P, esto es, manteniendo constantes a Δx y Δy, se quiere mejorar la aproximación de $f(P)$. Bajo este supuesto, ahora dz depende solamente de x_0 e y_0, y por lo tanto es una función de dos variables, a la cual también se le puede calcular el diferencial.

Este diferencial de un diferencial se lo conoce como diferencial segundo de la función y se denota con d^2z, el cual viene dado por:

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy \qquad (5)$$

donde dx y dy salen fuera de la operación diferencial por ser constantes y por la linealidad del operador diferencial.

Como z_x y z_y son funciones de las variables x e y resulta que

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy \qquad (6)$$

$$d\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy \qquad (7)$$

Reemplazando (6) y (7) en (5), resulta

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2$$

Asumiendo que las derivadas parciales cruzadas de $z = f(x,y)$ son continuas, resulta que las son iguales, y por lo tanto

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2 \qquad (8)$$

$$d^2 z = \underbrace{\left[dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right]^2}_{(A)} f(x,y)$$

La expresión (A) es un operador simbólico que tiene la forma de un binomio al cuadrado aplicado a $f(x,y)$, en el cual al desarrollarlo, el exponente en la derivada indica orden de derivación y para los incrementos potencia.
Esta idea se generaliza del siguiente modo:

$$d^n z = \left[dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(x,y)$$

Ejemplo: Hallar el $d^2 z$ de $z = x^2 + x - y^2$
Se deben calcular las derivadas parciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 1 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$$

$$d^2 z = 2(dx)^2 - 2(dy)^2$$

Fórmula de Taylor

Repaso

La fórmula de Taylor para funciones de una variable está dada por:

$$f(x) = f(x_0) + df + \frac{d^2f}{2!} + \cdots + \frac{d^nf}{n!} + \varepsilon$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)dx + \frac{f''(x_0)}{2!}dx^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}dx^n + \varepsilon$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \varepsilon$$

donde

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varepsilon}{(\Delta x)^n} = 0$$

Dos o más variables

La fórmula de Taylor está dada por

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + df + \frac{d^2f}{2!} + \cdots + \frac{d^nf}{n!} + \varepsilon \qquad (9)$$

donde

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\varepsilon}{\rho^n} = 0$$

Para el desarrollo de Taylor se necesita que las derivadas parciales sucesivas sean continuas, ya que esto garantiza la existencia de los diferenciales de la expresión.

El desarrollo permite aproximar una función en las cercanías de un punto conocido P_0 mediante expresiones polinómicas en dx y dy con grado según el orden del diferencial hasta donde se trunque la aproximación.

- Para $n = 1$ la aproximación es lineal, y representa un plano tangente a la superficie

$$z = z_0 + df + \varepsilon$$

- Para $n = 2$ la aproximación es cuadrática, y representa una cuádrica tangente a la superficie

$$z = z_0 + df + \frac{d^2f}{2!} + \varepsilon \qquad (10)$$

- Y así sucesivamente… mientras más términos se consideren en el desarrollo de Taylor, mejor será la aproximación.

<u>Ejemplo:</u> Aproximar lineal y cuadráticamente la función $z = e^x \cos(x + y)$ en torno de $P_0(0,0)$

Solución:

Aproximación Lineal : $\quad z = z_0 + dz$

$$z_0 = f(P_0) = 1$$

$$z_x(P_0) = \left(e^x \cos(x+y) - e^x \operatorname{sen}(x+y)\right)\big|_{P_0} = 1$$

$$z_y(P_0) = \left(-e^x \operatorname{sen}(x+y)\right)\big|_{P_0} = 0$$

Reemplazando en la expresión del diferencial

$$dz = 1dx + 0dy = 1(x-0) + 0(y-0) = x$$

Luego la expresión de la aproximación lineal será

$$z = \underbrace{1}_{z_0} + \underbrace{x}_{dz}$$

Se deja como ejercicio ver la relación entre plano tangente y aproximación lineal.

Veamos ahora la aproximación cuadrática

$$z_{xx}(P_0) = \left(e^x \cos(x+y) - e^x \operatorname{sen}(x+y) - e^x \operatorname{sen}(x+y) - e^x \cos(x+y)\right)\big|_{P_0}$$
$$= \left(-2e^x \operatorname{sen}(x+y)\right)\big|_{P_0} = 0$$

$$z_{xy}(P_0) = \left(-\,e^x \operatorname{sen}(x+y) - e^x \cos(x+y)\right)\big|_{P_0} = -1$$

$$z_{yy}(P_0) = \left(-e^x \cos(x+y)\right)\big|_{P_0} = -1$$

Reemplazando en (8)

$$d^2z = 0dx^2 - 2dxdy - 1dy^2 = -2(x-0)(y-0) - (y-0)^2$$

$$d^2z = -2xy - y^2$$

Luego la Aproximación cuadrática viene dada por

$$z = z_0 + dz + \frac{d^2z}{2!}$$

$$z = 1 + x - xy - \frac{1}{2}y^2$$