CALCULO II

Ingeniería Mecánica
Ingeniería Electromecánica

Equipo de Cátedra

Profesor Titular	Dr. Javier Gimenez
Profesor Adjunto	Dr. Emanuel Tello
Jefe de Trabajos Prácticos	Mg. Juan Pablo Llarena

AÑO 2024

INTRODUCCIÓN

DESCRIPCIÓN DE $\mathbb{R}^2$

Trataremos de construir un modelo algebraico para describir el espacio físico bidimensional o plano. Sabemos que cualquier punto P_0 del plano se representa por dos números reales (x_0, y_0), las cuales se denominan coordenadas de P_0 y se obtienen proyectando P_0 sobre cada uno de los ejes del sistema de referencia, con signos positivos o negativos según las proyecciones estén a la derecha o a la izquierda del origen sobre el primer eje, o hacia arriba o hacia abajo sobre el segundo eje (ver Figura 1).

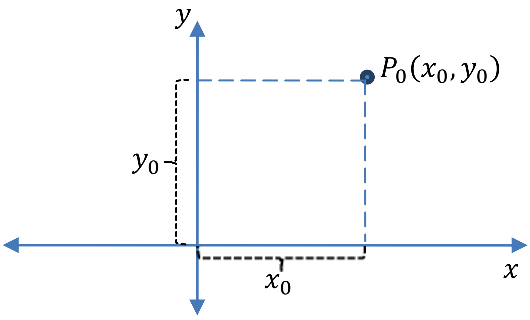


Figura 1

Dados dos puntos de plano

$$\vec{P}_1 = (x_1, y_1) \qquad \vec{P}_2 = (x_2, y_2)$$

se definen las siguientes dos operaciones:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2\,, y_1 + y_2)$$

$$\lambda\vec{P}_1 = \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Con estas operaciones obtenemos la estructura algebraica de espacio vectorial. Los elementos de este espacio, que son puntos, pueden interpretarse como los vectores de posición de los mismos. Es equivalente hablar del punto P o de su vector de posición $\vec{P}$. Este espacio es bidimensional porque cualquier sistema de dos vectores linealmente independientes conforman una base, y por ende, puede generar por combinaciones lineales todos los vectores del espacio.

Con la operación producto escalar:

$$\vec{P}_1 . \vec{P}_2 = x_1 . x_2 + y_1 . y_2 = \|\vec{P}_1\| \|\vec{P}_2\| \cos(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$$

el espacio en cuestión tiene la estructura de espacio euclídeo, en el que se introducen como fundamentales los conceptos siguientes:

- Ortogonalidad de vectores:

$$\vec{P}_1 \perp \vec{P}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{P}_1 . \vec{P}_2 = 0$$

- Norma o módulo de un vector:

$$\|\vec{P}\| = \sqrt{\vec{P}.\vec{P}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Distancia entre dos vectores:

$$d(\vec{P}_1, \vec{P}_2) = \|\vec{P}_2 - \vec{P}_1\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- Ángulo que forman dos vectores
  Si denominamos α el ángulo que forman dos vectores entonces su valor está dado por

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{P}_1 . \vec{P}_2}{\|\vec{P}_1\| \|\vec{P}_2\|}\right)$$

- Entre todas las bases del espacio, elegimos ahora la llamada base canónica u ortonormal de vectores unitarios y ortogonales

$$B = \{\check{\imath}, \check{\jmath}\}$$

- Cualquier vector $\vec{P} = (x, y)$ puede expresarse, de manera única así:

$$\vec{P} = x\check{\imath} + y\,\check{\jmath}$$

- El par de coordenadas (x, y) del punto P, se interpreta ahora como el par de componentes de su vector de posición $\vec{P}$

Se deja a cargo del alumno la descripción del espacio físico tridimensional.

Descripción del Espacio abstracto $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \{\vec{P} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \,/\, x_i \in \mathbb{R}\}$$

Con las operaciones:

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\lambda\vec{x} = \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}^n$ queda convertido en espacio vectorial de dimensión n, en el que una base está constituida por n vectores linealmente independientes.

- La operación producto escalar:

$$\vec{x}.\vec{y} = (x_1, x_2, \dots, x_n).(y_1, y_2, \dots, y_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

$$\vec{x}.\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \cos(\vec{x},\vec{y})$$

$\mathbb{R}^n$ alcanza la estructura de espacio euclideo, que admite como fundamentales las definiciones siguientes:

- Ortogonalidad de vectores:

$$\vec{x} \perp \vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x}.\vec{y} = 0$$

- Producto Vectorial de vectores de $\mathbb{R}^3$
  Dados dos vectores $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$
  Se define como producto vectorial a otro vector

$$\vec{x} \wedge \vec{y} \quad \text{es un vector} \begin{cases} \|\vec{x} \wedge \vec{y}\| = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \sin(\vec{x},\vec{y}) \\ \text{Dirección} : \perp \text{ al plano que determinan } \vec{x} \text{ e } \vec{y} \\ \text{Sentido: el sentido de la mano derecha} \end{cases}$$

No es conmutativo, esto es, los vectores $\vec{x} \wedge \vec{y}$ e $\vec{y} \wedge \vec{x}$ son distintos. Para ser más precisos estos vectores son opuestos $\vec{x} \wedge \vec{y} = -(\vec{y} \wedge \vec{x})$

La forma de calcular el vector es

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \begin{vmatrix} \check{e}_1 & \check{e}_2 & \check{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Se resuelve como un determinante teniendo en cuenta la regla de los signos

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2)\check{e}_1 - (x_1 y_3 - x_3 y_1)\check{e}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\check{e}_3$$

- Propiedad de paralelismo

$$\vec{x} \parallel \vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{0}$$

- Producto mixto
  El producto mixto de tres vectores de $\mathbb{R}^3$ da por resultado un escalar, que representa el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ como aristas y se calcula de la siguiente forma:

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \vec{x}.(\vec{y} \wedge \vec{z}) = (\vec{x} \wedge \vec{y}).\vec{z}$$

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

Propiedad: $\vec{x}\vec{y}\vec{z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ son coplanares

- Norma o módulo de un vector:

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x}.\vec{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

- Distancia entre dos vectores:

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{y}-\vec{x}\| = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots.+(y_n-x_n)^2}$$

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}$$

- Entre todas las bases de $\mathbb{R}^n$, se destaca la canónica dada por:

$$B = \{\breve{e}_1, \breve{e}_2, \dots, \breve{e}_n\} \text{ siendo } \breve{e}_i.\breve{e}_j = \begin{cases} 1 & si \quad i=j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

- Cualquier vector $\vec{x}$ se puede expresar de manera única como:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1\breve{e}_1 + x_2\breve{e}_2 + \cdots + x_n\breve{e}_n$$

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\breve{e}_i$$

Algunos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$.

1. Entorno de centro $\vec{a}$ y radio ε: es el conjunto de puntos del plano cuya distancia al punto centro $\vec{a}$ es menor que un valor $\varepsilon > 0$

$$B(\vec{a},\varepsilon) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \ / \ d(\vec{x},\vec{a}) < \varepsilon\}$$

2. Conjunto abierto y conjunta cerrado.

   Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es abierto si cualquier punto $\vec{x} \in A$ admite un $B(\vec{x},\varepsilon)$ incluido en A. (No contiene los puntos fronteras) (Figura 2 a)

   Un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es cerrado si su complementario A^c es abierto. (Todos los puntos fronteras pertenecen al conjunto A) (Figura 2 b)

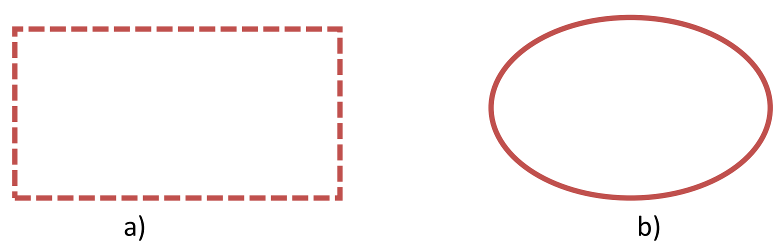


Figura 2

3. Conjuntos conexos.

   Un subconjunto $C \subseteq \mathbb{R}^2$es conexo si cualquier par de puntos de C se pueden unir por una poligonal (sucesión finita y continua de segmentos) incluida en C. (Figura 3a)

   Un subconjunto es simplemente conexo si cualquier poligonal cerrada incluida en C envuelve sólo puntos de C (No tiene agujeros) (Figura 3 b)

Figura 3

Estas definiciones se pueden extender a subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^n$

REPASO DE GEOMETRÍA

A. RECTA en el Plano

La ecuación explícita de la recta es:

$$y = mx + b$$

donde: m es la pendiente y geométricamente mide la inclinación de la recta.
b es la ordenada al origen y geométricamente representa que la recta corta al eje y en $y = b$.

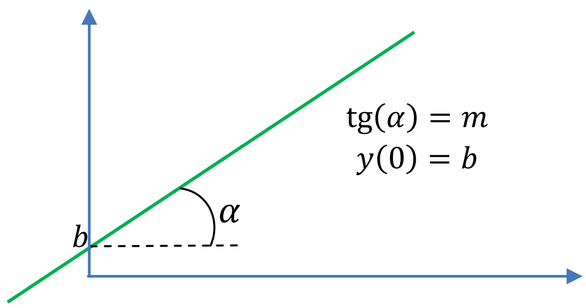
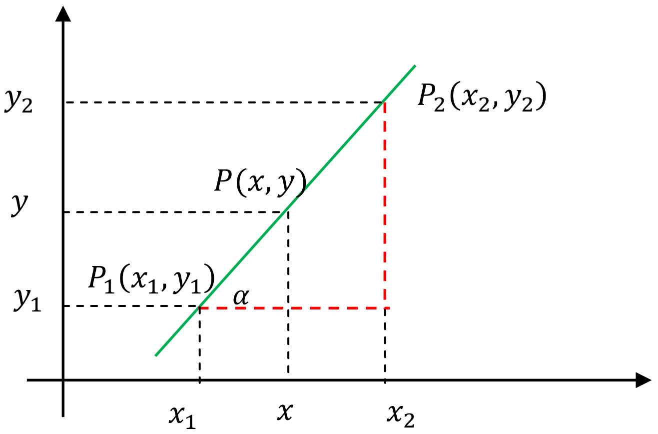


Figura 4

a) Recta que pasa por dos puntos

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ es



$$\mathrm{tg}(\alpha) = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Figura 5

Observando la Figura 5, por la semejanza de triángulos se tiene que

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$$

Despejando la variable y se obtiene la ecuación de la recta que pasa por dos puntos

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}(x - x_1) + y_1$$

b) Rectas particulares

1. Recta paralela al eje x de ecuación

$$y = b$$

cuya pendiente es cero, lo cual significa que $\alpha = 0$, y por ende es paralela al eje x

2. Recta paralela al eje y de ecuación

$$x = a$$

Ejemplo:

- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_0(1,2)$ y es paralela a la recta $y = -2x + 5$

Solución

Si es paralela a la recta $y = -2x + 5$ significa que tiene la misma pendiente, luego la pendiente de la recta pedida es $m = -2$

Además pasa por el punto $P_0(1,2)$ luego dicho punto verifica la ecuación de la recta pedida, entonces se cumple

$$2 = m.1 + b$$

Entonces

$$b = 2 - m = 2 - (-2) = 4$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta pedida es:

$$\boxed{y = -2x + 4}$$

- Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P_0(1,1)$ y es perpendicular a la recta

$$y = \frac{3}{4}x - 1$$

Solución

Las rectas perpendiculares tienen la pendiente inversa y cambiada de signo, o sea

$$m_2 = -1/m_1$$

En este caso la recta tendrá como pendiente

$$m = -\frac{4}{3}$$

Además pasa por el punto P_0 luego dicho punto verifica la ecuación de la recta. Esto es:

$$1 = -\frac{4}{3}.1 + b$$

Despejando el valor de b tenemos que $b = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$

Luego la ecuación de la recta es:

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{4}$$

B. Curvas en el plano $\mathbb{R}^2$

Las curvas en el plano pueden expresarse en forma explícita como $y = f(x)$ o de forma implícita como $F(x, y) = 0$.

En particular, se dice que la curva es una cónica si puede expresarse de forma implícita con $F(x, y)$ un polinomio de 2º grado con variables x, y. Luego, la expresión general de una cónica está dada por:

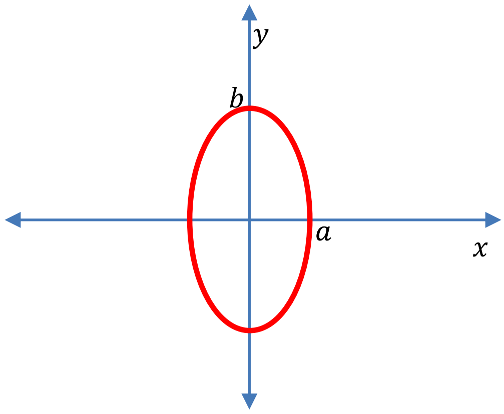
$$\underbrace{Ax^2 + Bxy + Cy^2}_{(***)} + \underbrace{Dx + Ey}_{(**)} + \underbrace{F}_{(*)} = 0 \qquad (1)$$

La cual está compuesta por un término cuadrático $(***)$, un término lineal $(**)$, y un término independiente $(*)$.

Clasificación de Cónicas

Elipse

Elipse
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
Elipse con centro en el origen y semiejes a y b



Ejemplos:

1) Escribir y graficar la elipse con centro en el origen y semiejes $a=2$ y $b=5$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$$

Se deja la gráfica para el alumno

2) Elipse con centro en el punto $P(1,-2)$ y semiejes $a=3$ y $b=4$

$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$$

Esta expresión, al igual que la anterior, se denominan formas canónicas de la elipse. Desarrollando cuadrados y operando se obtiene la forma polinómica o implícita

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}-\frac{2}{9}x+\frac{1}{4}y-\frac{23}{36}=0$$

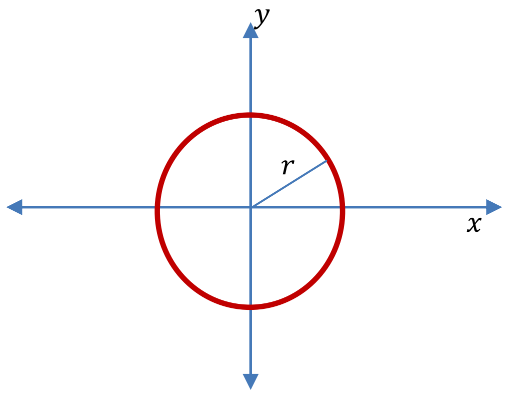
El proceso inverso sería partiendo de la forma polinómica obtener la expresión canónica, esto se realiza completando cuadrados.

La gráfica se deja para el alumno

Circunferencia

La circunferencia es un caso particular de la elipse en la que los semiejes son iguales y su ecuación es

$$x^2 + y^2 = r^2$$



Hipérbola

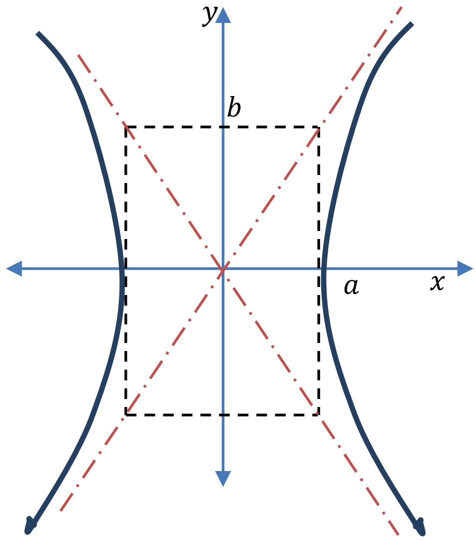
La ecuación de la hipérbola está dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

El signo $-$ indica el eje imaginario de la hipérbola, esto es, el eje con el que la hipérbola no se interseca

Las asíntotas son las rectas que surgen de

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = \pm\frac{b}{a}x$$



Parábolas

En la secundaria se estudió la ecuación explícita de la parábola:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Aquí sólo aparece una variable elevada al cuadrado, pero x e y podrían intercambiar los roles y el posterior análisis sería similar. Si la variable cuadrática es x, entonces el eje de simetría de la parábola es $x = x_V$ siendo x_V la coordenada x del vértice $V = (x_V, y_V)$ de la parábola. ¿Qué sucede si la variable cuadrática es y?

La determinación del vértice y las raíces de la parábola facilitan su representación gráfica, ya que con tres puntos se puede determinar perfectamente la parábola.

Las raíces de la parábola se determinan utilizando la Fórmula de Bhaskara

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las cuales pueden ser reales y distintas (si $b^2 - 4ac > 0$), reales y coincidentes (si $b^2 - 4ac = 0$), o complejas y conjugadas (si $b^2 - 4ac < 0$).

Mientras que el vértice es el punto de coordenadas

$$V = \left(-\frac{b}{2a}\ , c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

En caso de que las raíces no sean complejas (cuando $b^2 - 4ac \geq 0$) resulta que $x_V = (r_1 + r_2)/2$, mientras que y_V se obtiene reemplazando $x = x_V$ en la ecuación de la parábola, esto es

$$y_V = ax_V^2 + bx_V + c.$$

Para pasar de la ecuación explícita a la ecuación canónica de la parábola se debe completar cuadrados

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right)$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$y - y_V = a(x - x_V)^2$$

Por lo tanto, para hallar la ecuación canónica se puede optar por completar cuadrados o simplemente por hallar su vértice y reemplazarlo en la expresión hallada.

Ejemplo: Graficar la parábola

$$y = x^2 + 4x + 3$$

Solución: Si buscamos las raíces de la ecuación cuadrática asociada son:

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$r_1 = -1 \qquad r_2 = -3$$

Luego

$$x_V = \frac{r_1 + r_2}{2} = -2 \qquad \text{o alternativamente} \qquad x_V = -\frac{b}{2a} = -2$$

Luego $y_V = ax_V^2 + bx_V + c = -1$ y por lo tanto el vértice es $V(-2, -1)$

Si completamos cuadrados se obtiene lo mismo. Para ello debemos dividir por 2 el coeficiente del término lineal, y luego sumar y restar el cuadrado de dicho número para obtener un trinomio cuadrado perfecto, en efecto:

$$y = x^2 + 4x + (2)^2 - (2)^2 + 3$$

$$y = \underbrace{x^2 + 4x + 4}_{\substack{\text{trinomio} \\ \text{cuadrado} \\ \text{perfecto}}} - 1$$

$$y = (x+2)^2 - 1$$

Luego el vértice es el punto $P(-2,-1)$

Graficamos los tres puntos (raíces y vértice) y ubicamos la parábola

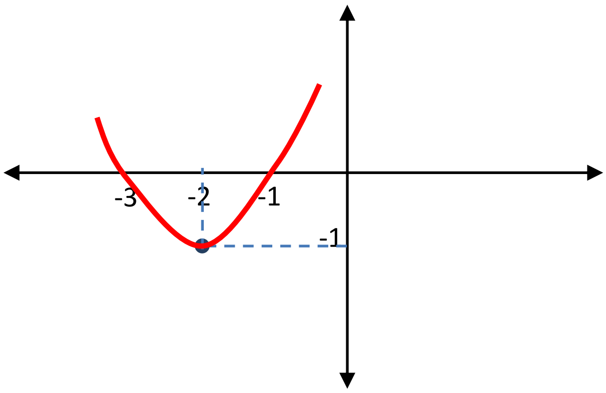


Figura 6

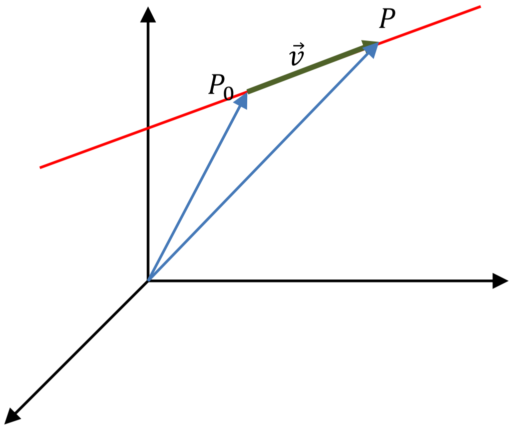
Cónicas Degeneradas

$y^2 - x^2 = 0$ par de rectas reales
$y^2 + x^2 = 0$ par de rectas imaginarias que se cortan en un punto real (0,0)
$x^2 + a^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm ai$ dos números imaginarios conjugados
$x^2 - a^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm a$ par de rectas paralelas al eje y
$(x-a)^2 = 0 \Longrightarrow x = a$ una recta

RECTAS EN $\mathbb{R}^3$

Una recta en el espacio puede estar definida de diferentes formas:

- **En forma vectorial**
  Si se conoce un punto de la recta $\vec{P}_0(x_0, y_0, z_0)$ y el vector director $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ que da la dirección a la recta



$$\vec{P}(x,y,z) \quad \vec{P}_0(x_0,y_0,z_0)$$

$$\vec{P}-\vec{P}_0 \parallel \vec{v}$$

$$\vec{P}=\vec{P}_0+\lambda\vec{v}$$

$$\begin{cases} x-x_0=\lambda v_1 \\ y-y_0=\lambda v_2 \\ z-z_0=\lambda v_3 \end{cases}$$

- **Forma Paramétrica de la Recta**

  Si se desarrolla la forma vectorial en términos de sus componentes obtenemos la expresión de la recta en forma paramétrica

$$\begin{cases} x=x_0+\lambda v_1 \\ y=y_0+\lambda v_2 \\ z=z_0+\lambda v_3 \end{cases}$$

- **Ecuación de la recta que pasa por dos puntos**

  Si se conocen dos puntos de la recta, por ejemplo P_0 y P_1, la diferencia entre ellos es un vector que está sobre la recta, luego se considera como vector director de la recta al vector $\vec{v}=\vec{P}_1-\vec{P}_0$. Reemplazando en la forma paramétrica se obtiene

$$\begin{cases} x=x_0+\lambda(x_1-x_0) \\ y=y_0+\lambda(y_1-y_0) \\ z=z_0+\lambda(z_1-z_0) \end{cases}$$

- **Forma Simétrica**

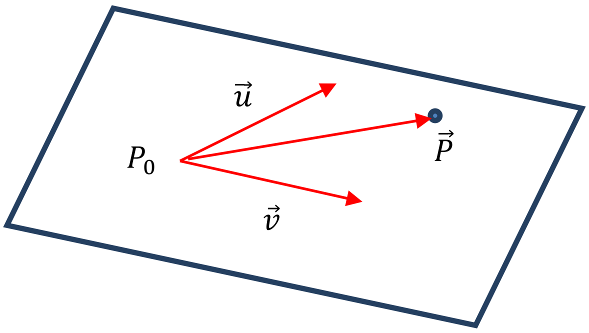
  La forma simétrica se obtienen de la forma paramétrica despejando λ de cada ecuación e igualando las tres ecuaciones. O sea

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

  Para poder hallar esta expresión se requiere que los puntos P_0 y P_1 no compartan ninguna de sus componentes, esto es: $x_0 \neq x_1$, $y_0 \neq y_1$, $z_0 \neq z_1$.

PLANOS

Para determinar la ecuación de un plano se necesitan 2 vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y un punto P_0



Consideremos un punto genérico P (o vector posición $\vec{P}$) del plano en cuestión y determinemos las condiciones que debe cumplir un punto para pertenecer al plano, esto es, determinemos la ecuación (del plano) que debe satisfacer un punto para pertenecer al plano. Las formas de determinar la ecuación del plano más usadas en esta materia son:

- Los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{P} - \vec{P}_0$ son coplanares, luego el producto mixto entre ellos es nulo

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

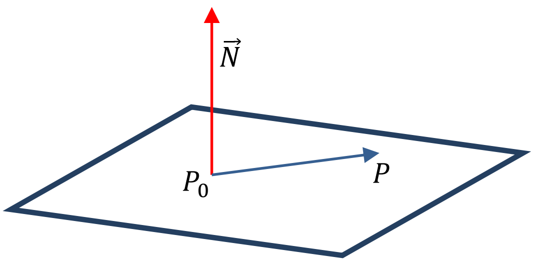
  Resolviendo el determinante:

$$(u_2v_3 - u_3v_2)(x - x_0) + (u_3v_1 - u_1v_3)(y - y_0) + (u_1v_2 - u_2v_1)(z - z_0) = 0$$

  Agrupando convenientemente se obtiene la ecuación implícita del plano de la forma

$$ax + by + cz + d = 0$$

- Con los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se puede hallar un vector $\vec{N} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ normal al plano, y por ende normal al vector arbitrario $\vec{P} - \vec{P}_0$



$$\vec{P} - \vec{P}_0 \perp \vec{N} \Leftrightarrow (\vec{P} - \vec{P}_0) \,.\, \vec{N} = 0$$

$$\vec{N} = (a, b, c)$$

Desarrollando el producto interior queda:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Ejemplo:

Hallar la ecuación del plano sabiendo que el vector normal es $\vec{N} = (2,3,1)$ y que pasa por el punto $P_0(1,-1,2)$

Solución: Reemplazando en la ecuación correspondiente queda:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
$$2(x - 1) + 3\big(y - (-1)\big) + 1(z - 2) = 0$$

Operando se obtiene

$$2x + 3y + z = 1$$

CUÁDRICAS

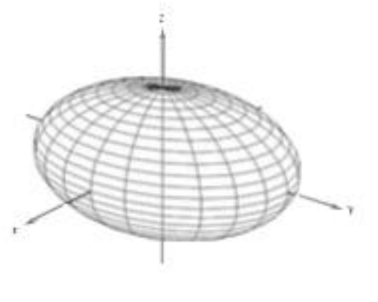
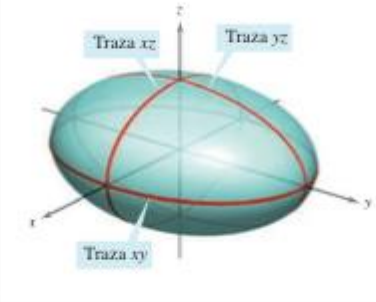
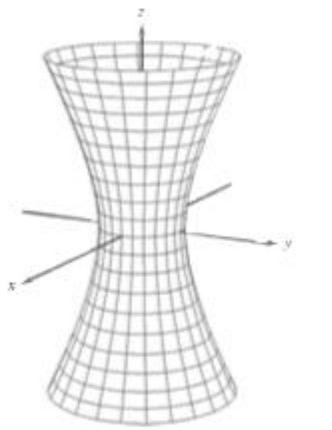
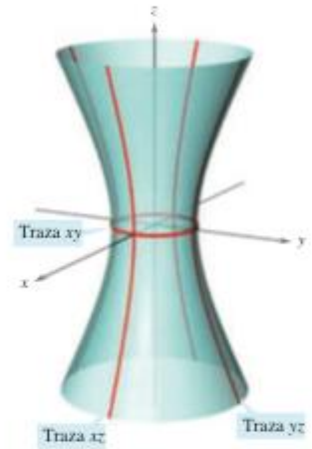
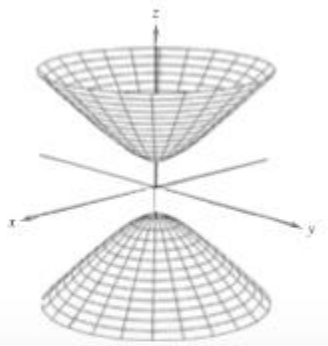
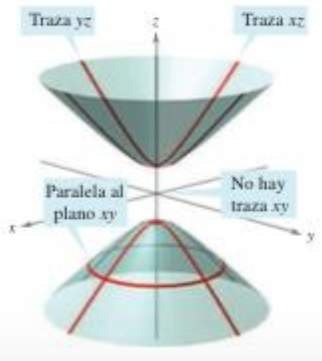
Son superficies en $\mathbb{R}^3$cuya ecuación es un polinomio de segundo grado de tres variables con dos variables independientes.

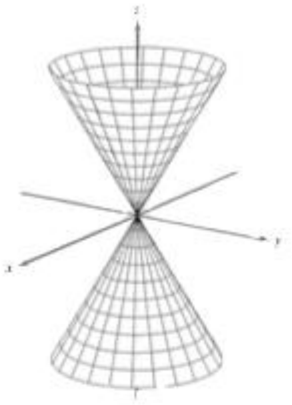
$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$
$$+2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

Clasificación de Cuádricas:

$$\text{Cuádricas}\begin{cases} \text{Con Centro}\begin{cases} \text{Elipsoide} \\ \text{Hiperboloide de}\begin{cases} \text{una hoja} \\ \text{dos hojas} \end{cases} \end{cases} \\ \text{Sin Centro}\begin{cases} \text{Paraboloide}\begin{cases} \text{Elíptico} \\ \text{Hiperbólico} \end{cases} \end{cases} \\ \text{Degeneradas}\begin{cases} \text{Superficies}\begin{cases} \text{Cilíndricas} \\ \text{Cónicas} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Ejemplos de Cuádricas expresadas en forma canónica

	**Elipsoide** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ *Traza* — *Plano* Elipse — Paralelo al plano xy Elipse — Paralelo al plano xz Elipse — Paralelo al plano yz La superficie es una esfera si $a=b=c\neq 0$.	
	**Hiperboloide de una hoja** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ *Traza* — *Plano* Elipse — Paralelo al plano xy Hipérbola — Paralelo al plano xz Hipérbola — Paralelo al plano yz El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.	
	**Hiperboloide de dos hojas** $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *Traza* — *Plano* Elipse — Paralelo al plano xy Hipérbola — Paralelo al plano xz Hipérbola — Paralelo al plano yz El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es positivo. No hay traza en el plano coordenado perpendicular a este eje.	

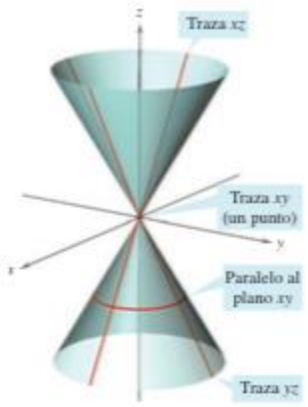


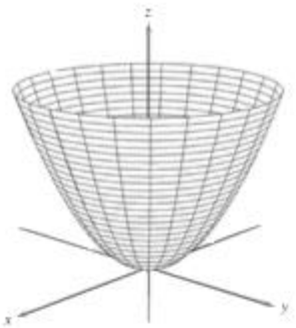
Cono elíptico

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Traza	*Plano*
Elipse	Paralelo al plano xy
Hipérbola	Paralelo al plano xz
Hipérbola	Paralelo al plano yz

El eje del cono corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo. Las trazas en los planos coordenados paralelos a este eje son rectas que se cortan.



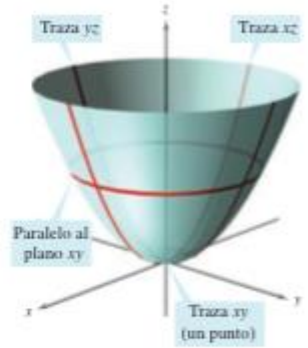


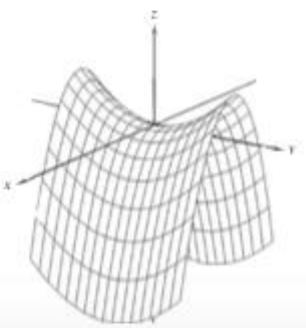
Paraboloide elíptico

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

Traza	*Plano*
Elipse	Paralelo al plano xy
Parábola	Paralelo al plano xz
Parábola	Paralelo al plano yz

El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la primera potencia.



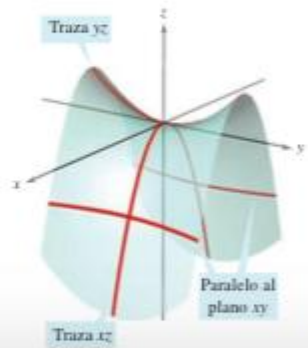


Paraboloide hiperbólica

$$z=\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}$$

Traza	*Plano*
Hipérbola	Paralelo al plano xy
Parábola	Paralelo al plano xz
Parábola	Paralelo al plano yz

El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la primera potencia.



Hay varios tipos de cilindros dependiendo de la base