Integrales de Superficie

A. Integrales de Superficie de Campos Escalares.

- 1) Calcular el área de la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 9$ de altura $h = 10$.
- 2) Calcular el área de la superficie cónica $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$, de altura $z = 4$.
- 3) Calcular la masa de la porción de superficie del paraboloides $z = 25 - x^2 - y^2$ para $9 \leq z \leq 16$ siendo la densidad $\delta(x, y, z) = 10$.
- 4) Calcular el área de la sección plana $x + y + z = 5$ limitada por $x^2 + y^2 = 4$.
- 5) Determinar el momento de inercia respecto del eje z de la superficie cónica $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ siendo $0 \leq z \leq 4$ y $\delta(x, y, z) = 1$.

B. Integrales de Superficie de Campos Vectoriales.

- 1) Una corriente de fluido tiene velocidad $\vec{V}(x, y, z) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$. Sea S la porción del plano limitado por un triángulo de vértices $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ cuya normal $\vec{n}$ tiene la tercera componente positiva. Se pide:
 - a) Calcular el caudal volumétrico que atraviesa la superficie en el sentido de $\vec{n}$.
 - b) Calcular el caudal volumétrico que sale del tetraedro limitado por S y los tres planos coordenados.
 - 2) Sea el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = xz\vec{e}_1 + yz\vec{e}_2 + x^2\vec{e}_3$. Se pide calcular el flujo a través de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
 - 3) Sea el campo $\vec{F}(x, y, z) = (z^2 - x)\vec{e}_1 - xy\vec{e}_2 + 3z\vec{e}_3$ y S la superficie $z = x^2 + y^2$ perteneciente al primer octante, limitada por $x = 0, y = 0, z = 4$. Se pide calcular el flujo de $\vec{F}$ a través de S .
 - 4) Sea $\vec{V}(x, y, z) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ la velocidad de un fluido. Se pide calcular el flujo de $\vec{V}$ a través de la porción de superficie $x^2 + y^2 = 9$, limitada por $0 \leq z \leq 3$.
 - 5) Dado el campo vectorial $\vec{V}(x, y, z) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$.
Calcular el flujo de $\vec{V}$ a través de la superficie cerrada limitada por $x^2 + y^2 = 9, z = 0, x + z = 16$.
-

C. Teorema de GAUSS y Teorema de STOKES

- 1) Sea $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{e}_1 + xy\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$ y $S: z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq 2$, se pide:
 - a) Hallar el flujo neto de $\vec{F}$ a través de la superficie cerrada S .
 - b) Verificar el teorema de Gauss.
 - c) Verificar el Teorema de Stokes.
- 2) Dado el campo $\vec{F}(x, y, z) = (x - y)\vec{e}_1 + (y - z)\vec{e}_2 + (z - x)\vec{e}_3$ y las superficies: $S_1 = \{(x, y, z): z = 32 - 2x^2 - 2y^2\}$ y $S_2: z = 0$, se pide:
 - a) Hallar el flujo neto de $\vec{F}$ a través de la superficie cerrada limitada por S_1 y S_2 , mediante integrales triples.
 - b) Hallar la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de la curva $C = S_1 \cap S_2$ utilizando integrales de superficie.
- 3) Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (zy)\vec{e}_1 + (-zx)\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ a través de la superficie esférica centrada en el origen de radio unitario, totalmente contenida en el primer octante, y limitada por los planos $z = 0, y = 0, x - y = 0$. Utilizar integrales triples.
- 4) Dado el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = -y\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ y el sólido limitado por las superficies $S_1: x^2 + y^2 = 4$, $S_2: z = -x - y + 10$, $S_3: z = 0$ se pide:
 - a) Hallar el flujo neto de $\vec{F}$ a través del sólido mediante una integral triple.
 - b) Calcular el flujo de $\vec{F}$ a través de S_2 .
 - c) Si se sabe que flujo de $\vec{F}$ a través de S_3 es nulo, calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de S_1 sin calcular la integral de superficie. Use el teorema correspondiente.
- 5) Hallar el flujo del rotor mediante una integral curvilínea para el campo $\vec{F}(x, y, z) = (3y, -zx, yz^2)$ y la superficie $S: 2z = x^2 + y^2$ limitada por $z = 2$.
- 6) Hallar el flujo del rotor del campo $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{e}_1 + z\vec{e}_2 + xe_3$ por la superficie $S: z = 1 - x^2 - y^2$ limitada por $z = 0$.
- 7) Hallar la circulación del campo $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{e}_1 + z\vec{e}_2 + x\vec{e}_3$ a lo largo de la curva intersección de $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ con $z = 3$.