Materia: Cálculo II

Año: 2022

Especialidades: Ingeniería Mecánica
Ingeniería Electromecánica

A - ***Repaso de geometría analítica***

1) Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos P_0 (3,2) y P_1(-3,-1). Graficar.
2) Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos P_0 (0,3) y P_1(4,-1). Graficar.
3) Hallar la ecuación de la recta que pasa por P_0 (2,4) y es paralela a $y = 2x + 1$.
4) Hallar la ecuación de la recta que pasa por P_0 (1, -3) y es perpendicular a $y = x$.
5) Graficar en forma aproximada la función:

   a) $y = 4x^2 - 16x + 12$

   b) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$

6) Representar gráficamente en R^2 e identificar la curva

   a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

   b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

   c) $x^2 + y^2 = 16$

   d) $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$

   e) $xy = 1$

   f) $\frac{y^2}{2} - 4x - y + \frac{1}{2} = 0$

7) Sea $\vec{a}(4,6,2)$ determinar la ecuación paramétrica de la recta de dirección $\vec{a}$ y que pasa por P_0(1,0,1).
8) Determinar la ecuación de la recta normal al plano $2x + 3y + z + 1 = 0$ y que pasa por el punto P_0(2,2,2).
9) Determinar la ecuación del plano:

   a) Que pasa por P_0(1,1,1) y tiene como vector normal $\vec{N} = [2,1,5]$

   b) Que pasa por P_0(1,1,1), P_1(2,1,3), P_2(-3,1,-2)

   c) Que pasa por P_0(1,1,1) y contenga a los vectores $\begin{cases} \vec{a} = (1,0,2) \\ \vec{b} = (-4,0,-3) \end{cases}$

10) Representar gráficamente en R^3 las siguientes funciones e interceptarlas con los planos que se indican.

    a) $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \quad con\ \ z = 0, z = 1, z = 9$

    b) $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{16} = 1\ \ con\ \ z = 0, z = 4, y = 0, x = 0$

    c) $-x^2 - y^2 + z^2 = 5\ \ con\ z = 0, z = 3, y = 0$

    d) $-x^2 + y^2 + z\ = 4\ \ con\ z = 0, x = 0, y = 0, y = \pm 2, y = \pm 3$

11) Representar gráficamente en R^3: $x^2 = y^2 + z^2$ y realizar las intersecciones con los planos z = 4, x = 4, y = 4.

12) Representar gráficamente en R^3 y en cada caso interceptar con el plano z = 4

a) $x^2 + y^2 = 9$

b) $z = x^2$

B - *Campos Escalares: Dominio e Imagen*

1) Halle dominio e imagen de:

a) $z = log(9 - x^2 - y^2)$ b) $z = log(x^2 - y^2)$

c) $z = log[x^2 + y^2 - 2x]$ d) $z = tg(\pi xy)$

e) $z = \frac{x^2+y^2}{(x-1)(y-2)}$ f) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

2) Para las siguientes funciones, se pide: dominio, imagen, curvas de nivel para los **z** dados y la que pasa por P_o. Grafique las curvas de nivel y el Dominio en el mismo sistema de ejes, y en los casos que sea posible grafique la superficie.

a) $z = x^2 + y^2$ $z \in \{1,4,9\}$ $P_0(4,3)$

b) $z = 9 - x^2 - y^2$ $z \in \{0,5,9\}$ $P_0(2,1)$

c) $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ $z \in \{0,3,4\}$ $P_0(1,1)$

d) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $z \in \{0,1,4\}$ $P_0(-1,3)$

e) $z = 2x - y - 4$ $z \in \{0,4,8\}$ $P_0(1,-3)$

f) $z = \frac{x^2+y^2}{2x}$ $z \in \{1,2\}$ Sin gráfico de la superficie.

C.- *Variación De Campos Escalares. Derivadas Y Gradiente*

1) Dadas las funciones:

a) $z = -2x^2y - {}^1/_{xy}$ c) $z = e^{xy^2} + 2x^2y$

b) $z = y^2(1 - x + xy)$ d) $z = cos(xy) + e^{2x}$

hallar las derivadas parciales que se indican: z_x = ? ; z_y = ?, z_{xx} = ? ; z_{yy} = ? ; z_{xy} = ?

2) Halle las derivadas direccionales de los campos siguientes en los puntos y direcciones que se indican:

a) $z = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ en $P_0(1,2)$ y dirección que va de $P_0(1,2)$ al $P_1(4,6)$

b) $z = ln\sqrt{x^2 + y^2}$ en $P_2(1,1)$ y la dirección de la bisectriz del primer cuadrante.

c) $w = x^2 - 3xz + 5$ en $P_3(1,2,-1)$ y la dirección que forma un ángulo igual con los tres semiejes coordenados positivos.

d) $w = xy + yz + xz$ en $P_4(2,1,3)$ y la dirección que va de $P_4(2,1,3)$ a $P_5(5,5,15)$.

3) La altura de una cúpula viene dada por $z = 49 - x^2 - y^2$, en el punto $P_0(2,1)$, se pide:
   a) Halle la dirección en que la pendiente de la cúpula es máxima para el punto P_0.
   b) Calcule esa pendiente.
   c) Verifique que el vector gradiente es perpendicular a la curva de nivel por P_0
4) La temperatura de una lámina plana viene dada por $z = 25 + x^2 + y^2$, se pide:
   a) Gráfica de la isoterma que pasa por el punto $P_0(4,3)$.
   b) Variación de la temperatura según la dirección de la isoterma correspondiente al punto P_0. Justifique la respuesta.
5) Dado el campo $z = 36 - x^2 - y^2$, se pide:
   a) Gráfica de la superficie.
   b) Curva de nivel para $z = 0;\ 20;\ 27;\ 32;\ 36$.
   c) Curva de nivel que pasa por $P_0(3,4)$
   d) ∇z en P_0 (graficar)
   e) Pendiente de la superficie en el punto correspondiente a P_0 según la dirección del gradiente.
   f) Rapidez de variación de la función en el punto P_0 según la dirección 45º con el eje x.
   g) Variación de la función en el punto P_0 según la dirección perpendicular al ∇z .
6) Supongamos una lámina metálica $L = \{(x, y)/|x| \leq 10; |y| \leq 10\}$. La distribución de temperatura está dada por $u = 100 + x^2 - y^2$, se pide.
   a) Temperatura en los vértices, puntos medios de los lados y centro de la lámina:
   b) Isotermas para $u = 19,51,75,91,100,109,125,149,181$.
   c) Isoterma correspondiente al $P_0(5,4)$ y temperatura correspondiente.
   d) Variación de temperaturas en P_0 en dirección de:
      i) El gradiente.
      ii) θ = 30º con el eje x (+).
      iii) $\vec{v} = (3,4)$
7) El piso de un salón es $H = \{(x, y)/|x| \leq 16; |y| \leq 10\}\}$ y su altura responde a la ecuación: $z = 16 - \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{25}$. Se pide:
   a) Gráfica del salón y alturas del techo sobre el centro, los rincones y los puntos medios de los lados del piso.
   b) Curva de nivel correspondiente a la altura 12. Curva de nivel que pasa por $P_0(8,5)$ y altura correspondiente. Gráfica.
   c) Pendiente del techo sobre P_0 y dirección en que se da máxima.

8) La función z viene dada por la ecuación: $x^2 + y - z^2 - xy = 0$.

   Hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ para $P_0 = (-1,0,1)$

9) Calcular z_x y z_y de las siguientes funciones implícitas:

a) $xyz - 4y^2z^2 + \cos(xy) = 0$

b) $3e^{xyz} - 4xz^2 + x\cos(y) = 2$

D.- *Aproximación de Campos Escalares y la Diferencial*

1) Calcular la diferencial dz y el incremento Δz para la función: $z = 4 + x^2 + \frac{1}{4}y^2$ en $P_0(10,20)$ para los incrementos $\Delta x = 0.5$ y $\Delta y = 1$
2) Se desea construir un cajón cerrado, con dimensiones interiores 60; 40; 20 cm, utilizando chapa metálica de peso específico 8 g./cm.³ y 0.2 cm de espesor. Se pide:
   a) Cálculo del peso exacto del metal precisado.
   b) Cálculo del peso aproximado, utilizando el concepto de diferencial. ¿Qué error se comete?
   c) Repita b) para un cajón abierto en su cara superior
3) Realice los mismos cálculos del ejercicio anterior para construir un tacho metálico abierto (con base, pero sin tapa), de diámetro externo de 8 cm y altura externa 12 cm, utilizando la misma clase de chapa.
4) La distribución de temperaturas de una lámina metálica plana en un instante está dada por la función $u = 16 - x^2 - y^2$ .Considere un entorno circular de la lámina, centrado en el punto $P_0(1,1)$. Se pide:
   a) Incremento de la temperatura para $\Delta x = \Delta y = 0.01$
   b) Valor de la diferencial de la temperatura en P_0.
   c) Valor absoluto del error cometido al tomar la diferencial en lugar de incremento.
5) La superficie dada por la función z = sen x + e^y + x^2 +1, es de graficación muy difícil, sin embargo, podemos sustituirla por otras superficies más sencillas, en el entorno de un punto dado. Considere el entorno del origen y realice lo siguiente:
   a) Aproxime la superficie dada mediante el plano tangente en el punto $P_0(0,0,2)$.
   b) Aproxímela mediante una función cuadrática tangente en el mismo punto.
6) La superficie dada por la ecuación $e^{zy} + x^3z - yz^2 - 3 = 0$ es muy difícil de graficar. Considere el entorno del punto $P_0(1,0)$ y aproxime la superficie dada mediante el plano tangente en el punto $P_0(1,0)$.
7) Sea la superficie dada por la ecuación $xyz = 1$. Considere el entorno del punto $P_0(1,1)$ y aproxímela mediante una función cuadrática tangente en el mismo punto.
8) Escriba las ecuaciones de los planos tangentes y de las rectas normales a las siguientes superficies en los puntos que se indican:
   a) $z = 9 - x^2 - y^2$ en un entorno del punto $P_0 = (0,0)$
   b) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ en el punto $P_0 = (1,2)$ para $z > 0$

E.- *Extremos libres y condicionados*

1) Hallar los extremos relativos y los puntos de ensilladura de cada función:
   a) $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3$
   b) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$
   c) $f(x,y) = y^3 - 3yx^2 - 12y^2 - 3x^2 + 1$
   d) $f(x,y) = e^{xy}$
   e) $f(x,y) = x^3 + (y-1)^3$
   f) $f(x,y) = x^2 + (y-3)^2$
   g) $f(x,y) = 4 - [x(y-1)]^2$
2) El beneficio que se obtiene produciendo **x** unidades del modelo A más **y** unidades del modelo B se aproxima mediante $P(x,y) = 8x + 10y - 0.001(x^2 + xy + y^2) - 10000$. Hallar el nivel de producción que reporta un beneficio máximo.
3) Para la $f(x,y) = x(x^2 + 3y^2 - 75)$ analice los puntos estacionarios y para aquel que sea extremo determine el plano tangente
4) Para $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + ay^2$ determine un valor posible de a para que la función tenga un mínimo
5) Calcular la distancia mínima del punto $P_0(0,0,0)$ al plano de ecuación $2x + 3y + z = 14$
6) Hallar los tres números positivos x, y, z que satisfagan las siguientes condiciones:
   a) La suma es 30 y el producto es máximo
   b) La suma es 30 y la suma de los cuadrados es mínima